אוניברסיטת בן גוריון בנגב

<u>מדור בחינות</u>

תאריך הבחינה: <u>28.07.1998</u>
שם המורה: <u>בליצקי, מרקוס, ליידרמן</u>
מבחן ב: <u>חדו"א א2</u>
מס' הקורס: <u>201-1-0021</u>
מיועד לתלמידי: <u>מתמטיקה, מדעי המחשב</u>
שנה: <u>א'</u>, סמ': <u>ב'</u>, מועד: <u>א'</u>
משך הבחינה: <u>3 שעות</u>
חומר עזר: <u>מחשב כיס עם צג קטן</u>

מס' הנבחן:______________

יש לענות על שאלה מס'1 ,
וכן על ארבע בדיוק מבין השאלות 2-6
לכל השאלה משקל זהה (20 נקודות) .
פטרו את שקוליכם ונמקו אותם.
נסחו במדויקתוצאות שעליהן הנכן מסתמכים.

<u>השאלות:</u>

1. (חובה) תן הגדרת דיפרנציאבילית של פונקציה $z=f(x,y)$ של בנקודה (x_0,y_0). נסח והוכח את משפט על תנאי מספיק לדיפרנציאביליות של פונקציה $z=f(x,y)$ בנקודה.

2. א. חקור ההתכנסות אינטגרל לא אמיתי $\int_1^2 \frac{(x-1)^\alpha}{\ln x}dx$ לכל פרמטר α ממשי.

ב. מצא את הגבול $\lim_{t\to 1+0}\frac{1}{(t-1)^\alpha}\int_t^2 \frac{(x-1)^\alpha}{\ln x}dx$ לכל פרמטר α ממשי.

3. נתון הטור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^p n}{n}x^n$ עם פרמטר p ממשי.

מצא את הרדיוס התכנסותו וחקור את התכנסות הטור בקצוות לכל p

4. נתון טור - $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+nx)^2}, x>0$

א. הוכח שטור מתכנס לכל $x>0$ וסכומו הוא פונקציה רציפה בתחום $(0,+\infty)$

ב. הוכח שטור לא מתכנס במדה שווה בתחום $(0,+\infty)$

5. תחום D במישור חסום ע"י 2 עקומות:

$$\begin{cases} x=\cos^3\theta \\ y=\sin^3\theta \end{cases},0<\theta<\frac{\pi}{2};\quad \begin{cases} x=2\cos^3\theta \\ y=2\sin^3\theta \end{cases},0<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

והקטעים של צירי הקואורדינטות.

א. מצא את השטח של D

ב. מצא את האורך של השפה של D

6. הוכח את האי-שיוון $x^2y+\frac{1}{2}y^3\le x^2+y^2$ כאשר $x^2+y^2\le\frac{3}{2}$

<u>רמז</u>: הגדר פונקציות העזר מתאימה ומצא את הערכה הכי גדול בתחום: $x^2+y^2\le\frac{3}{2}$

-בהצלחה-

פתרון של המבחן מועד ב' 1998

שאלה 2

א. ידוע ש $\ln x \sim (x-1)$ כאשר $x \to 1$. לפי קריטריון השווה $\int_1^2 \frac{(x-1)^\alpha}{\ln x}dx \sim \int_1^2 \frac{(x-1)^\alpha}{(x-1)}dx = \int_1^2 (x-1)^{\alpha-1}dx$

האינטגרל מתכנס אם"ם $\alpha-1>-1$ כלומר $\alpha>0$

ב. אם $\alpha<0$ אזי לפי סע' א $\lim_{t\to1+0}\int_t^2 \frac{(x-1)^\alpha}{\ln x}dx=+\infty$. אם $\alpha<0$ גם $\lim_{t\to1+0}\frac{1}{(t-1)^\alpha}=+\infty$ ומותר להשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{t\to1+0}\frac{1}{(t-1)^\alpha}\int_t^2\frac{(x-1)^\alpha}{\ln x}dx=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{t\to1+0}\frac{\frac{-(t-1)^\alpha}{\ln t}}{\alpha(t-1)^{\alpha-1}}=-\frac{1}{\alpha}\lim_{t\to1+0}\frac{t-1}{\ln t}=\left(\frac{0}{0}\right)=-\frac{1}{\alpha}\lim_{t\to1+0}\frac{1}{1/t}=-\frac{1}{\alpha}$$

אם $\alpha=0$ אזי $\lim_{t\to1+0}\int_t^2\frac{1}{\ln x}dx=+\infty$

אם $\alpha>0$ אזי $\lim_{t\to1+0}\int_t^2\frac{(x-1)^\alpha}{\ln x}dx$ סופי לפי סע' א. $\lim_{t\to1+0}\frac{1}{(t-1)^\alpha}=+\infty$ ולכן

$$\lim_{t\to1+0}\frac{1}{(t-1)^\alpha}\int_t^2\frac{(x-1)^\alpha}{\ln x}dx=\begin{cases}-1/\alpha, & \alpha<0\\ +\infty, & \alpha>0\end{cases}$$

שאלה 3

$R=\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\left[\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right]^p=1$ לכל פרמטר p ממשי

בקצה $x=1$ מקבלים טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^p n}{n}$ כדי להשתמש במבחן אינטגרלי של קושי נגדיר פונקציה $f(x)=\frac{\ln^p x}{x}$ כאשר $x>1$

אם $p\le 0$ אזי ברור ש- $f(x)\searrow 0, x\to\infty$. אם $p>0$ אזי $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{1/p}}=0$ לכן $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ כמו כן $f(x)$ יורדת כי

$f'(x)=\frac{\ln^{p-1}x(p-\ln x)}{x^2}<0$ לכל $x>e^p$ ובכן לפי מבחן אינטגרלי הטור מתכנס אם"ם מתכנס אינטגרל

$\int_2^\infty f(x)dx=\int_2^\infty\frac{\ln^p x}{x}dx=\int_2^\infty \ln^p x d(\ln x)$ מתכנס אם"ם $p<-1$.

בקצה $x=-1$ מקבלים טור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^p n}{n}(-1)^n$ הוא מתכנס לכל p לפי מבחן לייבניץ כי הוכחנו כבר ש- $f(x)=\frac{\ln^p x}{x}$ יורדת לאפס

לכל p כאשר $x\to\infty$

<u>תשובה</u> $R=1$

ב $x=1$ טור מתכנסב אם"ם $p<-1$

ב $x=-1$ טור מתכנסב לכל p

שאלה 4

א. נוכיח שעבור כל $a>0$ בתחום $[a,\infty)$ הטור מתכנס במדה שווה . קל לראות ש- $\frac{1}{(1+nx)^2}<\frac{1}{(nx)^2}\le\frac{1}{a^2}\frac{1}{n^2}$

לכל $x\ge a$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+nx)^2}<\frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ב- $[a,\infty)$

טור מספרי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס, לכן לפי משפט וויארשטרס טור של פונקציות מתכנס במדה שווה . פונקציות $\frac{1}{(1+nx)^2}$ רציפות,

לכן סכום של טור הוא פונקציה רציפה בתחום $[a,\infty)$ כיוון ש $a>0$ מספר שרירותי אזי סכום של טור הוא פונקציה רציפה בכל נקודה $x>0$

ב. אם טור $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ מתכנס במדה שווה בתחום X אזי לפי קריטריון קושי מתקיים בפרט ש:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N\quad\forall n>N\quad\forall x\in X\quad|u_n(x)|<\varepsilon$$

לכן אם נסמן $c_n=\sup_{x\in X}|u_n(x)|$ אזי $\lim_{n\to\infty}c_n=0$ אבל אצלינו $c_n=\sup_{x\in X}\frac{1}{(1+nx)^2}=1$ לכן אין התכנסות במדה שווה בתחום $(0,\infty)$.

שאלה 5

א. שטח הוא הפרש בין שני משולשים עקומים. שטח משולש עקום הוא

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(xdy-ydx)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(y'(\theta)x(\theta)-y(\theta)x'(\theta)\right)d\theta$$

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[\left(2\sin^3\theta\right)'2\cos^3\theta-\left(2\cos^3\theta\right)2\sin^3\theta\right]d\theta-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[\left(\sin^3\theta\right)'\cos^3\theta-\left(\cos^3\theta\right)\sin^3\theta\right]d\theta=$$

$$=\frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}\left[\left(\sin^2\theta\right)\cos^4\theta+\left(\cos^2\theta\right)\sin^4\theta\right]d\theta=\frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}\left[\sin^2\theta\cos^2\theta\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\right]d\theta=$$

$$=\frac{9}{8}\int_0^{\pi/2}\left[\sin^2 2\theta\right]d\theta=\frac{9}{8}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1-\cos4\theta}{2}\right]d\theta=\frac{9}{8}\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin4\theta}{8}\right]\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{9}{32}\pi$$

ב. שפה מורכבת משתי עקומות ושני קטעים. אורך של עקומה הוא

$$L=\int_0^{\pi/2}\sqrt{[(x'(\theta)]^2+[(x'(\theta)]^2}d\theta=(2+1)\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(3\cos^2\theta\sin\theta\right)^2+\left(3\cos\theta\sin^2\theta\right)^2}d\theta=$$

לכן:

$$=9\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(\cos^4\theta\sin^2\theta\right)+\left(\cos^2\theta\sin^4\theta\right)}d\theta+2=\frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}\sin2\theta d\theta+2=-\frac{9}{4}\cos2\theta\Big|_0^{\pi/2}=\frac{9}{2}+2=6\frac{1}{2}$$

<u>דרך השניה</u>

א. נשתמש בנוסחה $S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}xdy=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}y'(\theta)x(\theta)d\theta$

עבור תחום הזה

$$S=\int_0^{\pi/2}\left[\left(2\sin^3\theta\right)'2\cos^3\theta-\left(\sin^3\theta\right)'\cos^3\theta\right]d\theta=9\int_0^{\pi/2}\left[\left(\sin^2\theta\right)\cos^4\theta\right]d\theta=$$

$$=9\int_0^{\pi/2}\left[\frac{4\sin^2\theta\cos^2\theta}{4}\right]\cos^2\theta d\theta=\frac{9}{8}\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\left[\frac{1+\cos2\theta}{2}\right]d\theta=$$

$$=\frac{9}{8}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1-\cos4\theta}{2}\right]+\frac{9}{16}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta d(\sin2\theta)=\frac{9}{16}\frac{\pi}{2}-\frac{9}{64}\sin4\theta\Big|_0^{\pi/2}+\frac{9}{48}\sin^3 2\theta\Big|_0^{\pi/2}=\frac{9}{32}\pi$$

<u>שאלה 6</u>

נגדיר את הפונקציה העזר $f(x,y)=x^2y+\frac{1}{2}y^3-(x^2+y^2)$ ונמצא את הערכה הכי גדול בתחום $x^2+y^2\le\frac{3}{2}$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=2xy-2x=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=x^2+\frac{3}{2}y^2-2y=0\end{cases};\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ \frac{3}{2}y^2-2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0, y=\frac{4}{3},\quad or\quad y=0\\ x\ne0, y=1, x^2=\frac{1}{2}\end{cases}$$

ובכן יש 4 נקודות חשודות $M_1(0,0);M_2\left(0,\frac{4}{3}\right);M_{3,4}\left(\pm\frac{1}{\sqrt2},1\right);$ כולן נמצאות בתחום הסגור $x^2+y^2\le\frac{3}{2}$ חוץ מנקודה M_2. נחקור על השפה.

נקבל פונקציה $x^2=\frac{3}{2}-y^2$

$$g(y)=\left(\frac{3}{2}-y^2\right)y+\frac{1}{2}y^3-\frac{3}{2},\quad y\in\left[-\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$$

$$g(y)=-\frac{1}{2}y^3+\frac{3}{2}y-\frac{3}{2};g'(y)=-\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{2}$$

$$g'(y)=0\Leftrightarrow y=\pm1$$

$$g(1)=-\frac{1}{2};g(-1)=-\frac{5}{2}$$

$$g\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{8}}-1\right)<0;g\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=-\frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{8}}+1\right)$$

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt2},1\right)=-\frac{1}{2};\ f(0,0)=0$$

לכן $f(x,y)=0$ מקסימום כלומר $x^2+y^2\le\frac{3}{2}$

מתקיים $x^2y+\frac{1}{2}y^3\le x^2+y^2$ לכל $x^2+y^2\le\frac{3}{2}$.