אוניברסיטת בן גוריון בנגב

<u>מדור בחינות</u>

מס' הנבחן: ____________

תאריך הבחינה: 07.07.1998
שם המורה: בליצקי, מרקוס, ליידרמן
מבחן ב: חדו"א א2
מס' הקורס: 201-1-0021
מיועד לתלמידי: מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה: א', סמ': ב', מועד: א'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: מחשב כיס עם צג קטן

יש לענות על שאלה מס'1 ,
וכן על ארבע בדיוק מבין השאלות 2-6
לכל השאלה משקל זהה (20 נקודות) .
פטרו את שקוליכם ונמקו אותם.
נסחו במדויקתוצאות שעליהן הנכן מסתמכים.

<u>השאלות:</u>

1. (חובה) תן הגדרת ההתכנסות של טור פונקציות במידה שווה והוכח משפט של רציפות סכום של טור פונקציות

2. חקור ההתכנסות בהחלט ובתנאי של אינטגרל לא אמיתי $\int_0^\infty \frac{\ln\left(t^2+1\right)}{\sqrt{t^2+1}}\sin t\,dt$

3. הוכח שטור : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_1^{n^2}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ מתבדר.

4. נתון טור החזקות - $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)^\alpha-n^\alpha\right]\cdot\ln n\cdot x^n$

עם פרמטר ממשי α .

א. מצא את הרדיוס ההתכנסות של הטור.

ב. חקור ההתכנסות בקצוות

5. נתונה הפונקציה $f\left(x,y\right)=\begin{cases}x^3\sin\frac{y}{x^2}+y^3\sin\frac{y}{y^2}, & xy\neq 0\\ 0, & xy\neq 0\end{cases}$.

הוכח שהיא דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$

6. נתונה הפונקציה $f\left(x,y\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}y^3+xy-x^2-y^2$.

א. מצא כל הנקודות האקסטרמום במישור

ב. מצא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר במשולש : $D=\{(x,y):x\geq 0,y\geq 0,x-y\leq 3\}$

-בהצלחה-

פתרון של המבחן מועד א' 1998

שאלה 2

נסמן
$$g(t)=\frac{\ln\left(t^2+1\right)}{\sqrt{t^2+1}};\ f(t)=\sin t$$
$$g(t)\sim\frac{\ln\left(t^2\right)}{t}=2\frac{\ln t}{t},t\to\infty$$

אינטגרל $\int_0^\infty\frac{|\sin t|}{t}dt$ מתבדר לכן לפי מבחן השוואה גם $\int_0^\infty\frac{\ln\left(t^2+1\right)}{\sqrt{t^2+1}}\sin t dt$ מתבדר.

נראה שאינטגרל מתכנס בתנאי. בשביל זה יש לבדוק תנאים של מבחן דיריכלה.

$$\lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t}=0$$

מונוטונית של $g(t)$:

$g'(t)=\frac{t}{\left(t^2+1\right)^{3/2}}\left(2-\ln\left(t^2+1\right)\right)<0$ החל מ t_0 מסוים. לכן $g(t)$ יורדת מונוטונית,

תנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ואינטגרל מתכנס בתנאי.

שאלה 3

נראה ש-:
$$\frac{1}{n^2}\int_1^{n^2}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx\sim\frac{2}{n},n\to\infty$$

כלומר: $(*)$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^{n^2}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=2$ והפוך n למשתנה רציף ואז נוכל להשתמש בכלל לופוטל . נגזרת של אינטגרל מחשבים בעזרת נוסחה של ניוטון- ליבניץ :

$$(*)=\lim_{n\to\infty}2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=2;\quad \ln(1+t)\sim t,t\to0$$

ובכן טור $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}\int_1^{n^2}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ שקול לטור $\sum_{n=1}^\infty\frac{2}{n}$ ולכן מתבדר כטור הרמוני .

שאלה 4

אם α מספר טבעי אזי $(n+1)^\alpha-n^\alpha\sim\alpha n^{\alpha-1},n\to\infty$

נראה ששיקילות זאת מתקיימת לכל ערך של α

לפי משפט לגרנג' קיימת נקודה $c\in\left(n,n+1\right)$ כך ש $(n+1)^\alpha-n^\alpha=\alpha c^{\alpha-1},n\to\infty$

nP עולה עם $P>0$ וירדת עם $P<0$ לכן

אם $\alpha>1$ אז $\alpha n^{\alpha-1}\le\alpha c^{\alpha-1}\le\alpha\left(n+1\right)^{\alpha-1}$

אם $\alpha<1$ אז $\alpha n^{\alpha-1}\ge\alpha c^{\alpha-1}\ge\alpha\left(n+1\right)^{\alpha-1}$

בשני המקרים ממשפט "סנדויץ'" נובע ש $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha c^{\alpha-1}}{\alpha n^{\alpha-1}}=1$

א. לכן רדיוס התכנסות אפשר לחשב על ידי גבול שקול : $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha n^{\alpha-1}\ln n}{\alpha\left(n+1\right)^{\alpha-1}\ln\left(n+1\right)}=1$ לכל $\alpha\neq 0$

ב. ידוע שטור מספרי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^p}$ מתכנס לכל $p>0$ ומתבדר לכל $p\leq 0$ לכן טור חיובי $\alpha\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{\alpha-1}\ln n$ מתכנס לכל $\alpha\leq 1$ ובכן טור חזקות מתכנס בקצה $x=1$ אם ורק אם $\alpha\leq 1$.

נחקור התכנסות בקצה $x=-1$.

אם $\alpha\geq 1$ אזי לא מתקיים תנאי הכרחי על התכנסות.

נראה שעבור $0<\alpha<1$ מתקיימים תנאים של מבחן לייבניץ' ולכן טור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]\cdot\ln n\cdot\left(-1\right)^{n}$ מתכנס בתנאי

נגדיר פונקצית עזר

$$\varphi\left(t\right)=\left[(t+1)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]\ln t\quad t>1$$

$$\varphi'\left(t\right)=\left[(t+1)^{\alpha}-t^{\alpha-1}\right]\left(\alpha\ln t+1\right)$$

אם $\alpha>0$ גורם שני חיובי החל מ t מסוים

אם $\alpha<0$ גורם ראשון שלילי ולכן $\varphi'\left(t\right)<0$ החל מ t מסוים כלומר יורדת החל מ t מסוים ולכן סדרה $\left\{\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]\ln n\right\}_{n=1}^{\infty}$ יורדת כאשר $0<\alpha<1$

תשובה: טור מתכנס בקצה $x=\pm 1$ לכל $\alpha\geq 0$

טור מתכנס בהחלט בקצה $x=-1$ לכל $\alpha\geq 0$ ומתכנס בתנאי כאשר $0<\alpha<1$

<u>שאלה 5</u>

$f(x,y)=0$ אם לפחות אחד ממשתנים x,y שווה לאפס, לכן $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ נרשום:

$$\triangle z=0\cdot\triangle x+0\cdot\triangle y+\alpha\triangle x+\beta\triangle y=\left(\triangle x\right)^{3}\sin\left(\frac{\triangle y}{\left(\triangle x\right)^{2}}\right)+\left(\triangle y\right)^{3}\sin\left(\frac{\triangle y}{\left(\triangle y\right)^{2}}\right)$$

מפה אפדר לקבוע:

$$\alpha\left(\triangle x,\triangle y\right)=\left(\triangle x\right)^{2}\sin\left(\frac{\triangle y}{\left(\triangle x\right)^{2}}\right)$$

$$\beta\left(\triangle x,\triangle y\right)=\left(\triangle y\right)^{2}\sin\left(\frac{\triangle y}{\left(\triangle y\right)^{2}}\right)$$

ידוע ש $\left|\sin\varphi\right|\leq\left|\varphi\right|$ לכל φ לכן

$$\left|\alpha\left(\triangle x,\triangle y\right)\right|\leq\left|\triangle y\right|$$

$$\left|\beta\left(\triangle x,\triangle y\right)\right|\leq\left|\triangle x\right|$$

לכן לפי משפט "סנדויץ'" מיד מקבלים ש $\lim\limits_{\substack{\triangle x\to 0\\ \triangle y\to 0}}\alpha=\lim\limits_{\substack{\triangle x\to 0\\ \triangle y\to 0}}\beta=0$

כלומר $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$

שאלה 6

א. קיימות $\frac{\partial f}{\partial x}=x^2+y-2x;\ \frac{\partial f}{\partial y}=-y^2+x-2y$ בכל מישור

או $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases};\Rightarrow x^2-y^2-(x+y)=0\Rightarrow (x+y)(x-y-1)=0$

אם $x+y=0$ כלומר $y=-x$ אז

$$x^2-3x=0\Rightarrow x=3,\ \ or\ \ x=0$$

אם $x-y-1=0$ כלומר $y=x-1$ אז

$$x^2-x-1=0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},$$

ובכן יש 4 נק' סטציונריות: $M_1(0,0); M_2(3,-3); M_3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right); M_4\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$

נבדוק תנאי מספיק של אקסטרמום

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2x-2; C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2y-2; B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1$$

$$\Delta=AC-B^2$$

$\max\ \ -\ \ \ \Delta=3>0, A<0, M_1(0,0)$

$\min\ \ -\ \ \ \Delta>0, A>0, M_2(3,-3)$

$\textit{sadlle point}\ \ \ \Delta=-5<0, M_3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right); M_4\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$

ב. נחקור על השפה $0\le x\le 3, y=0$

$$g(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2,\quad 0\le x\le 3$$

$$g'(x)=x^2-2x=0\Rightarrow x=0\ \ or\ \ x=2$$

$$g(0)=0; g(2)=-\frac{4}{3}, g(3)=0$$

נחקור על השפה $-3\le y\le 0, x=0$

$$g(y)=\frac{1}{3}y^3-y^2,$$

$$g'(y)=-y^2-2y=0\Rightarrow y=0\ \ or\ \ y=-2$$

$$;g(-2)=-\frac{4}{3}, g(-3)=0$$

נחקור על השפה $0\le x\le 3, y=x-35$

$$g(x) = 2x^2 - 6x, \quad 0 \le x \le 3$$

$$g'(x) = 4x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2};$$

<u>תשובה :</u>

$$\max\{f(x, y : (x, y) \in G\} = 0$$

$$\min\{f(x, y : (x, y) \in G\} = -\frac{9}{2}$$