אוניברסיטת בן גוריון בנגב

<u>מדור בחינות</u>

תאריך הבחינה: <u>02.07.1997</u>
שם המורה: <u>בליצקי, אלפאי, ליידרמן</u>
מבחן ב: <u>חדו״א א2</u>
מס׳ הקורס: <u>201-1-0021</u>
מיועד לתלמידי: <u>מתמטיקה, מדעי המחשב</u>
שנה: <u>א׳</u>, סמ׳: <u>ב׳</u>, מועד: <u>א׳</u>
משך הבחינה: <u>3 שעות</u>
חומר עזר: <u>אין</u>

מס׳ הנבחן: ____________

יש לענות על שאלה אחת משתי שאלות ההוכחה (שאלות 1-2) ועל 4 שאלות מ- 3-7
לכל השאלה משקל זהה (20 נקודות).

<u>השאלות:</u>

1. הוכח קיום האינטגרל המסוים של פונקציה רציפה בקטע סגור.

2. נסח הגדרת התכנסות במידה שווה. הוכח רציפות של סכום הטור פונקציות רציפות המתכנס במידה שווה.

3. נתבנו בטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+c_n}$ כאשר $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סידרה חסומה.

א. הוכח כי הטור מתכנס עבור $p>\frac{1}{2}$

ב. בנה סידרה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה כך שטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{1/2}+c_n}$ מתבדר

4. עבור איזה ערכים p מתכנס האינטגרל $\int_0^{\infty} x^p \sin e^x dx$?

5. היכח כי סכום של טור - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n} x\sin x$ היא פונקציה רציפה בקטע $[0,\pi]$

6. נתונה פונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\ln\left(x^2+y^2\right)}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0\end{cases}.$$

א. האם פונרציה רציפה בנקודה $(0,0)$?

ב. האם היא דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$?

7. נתונה פונקציה $f(x,y)=\frac{1}{3}x^3-3x+y^2$

א. מצא את כל הנקודות האקסטרמום שלה במישור

ב. מצא את הערך הכי גדול ואת הערך הכי קטן של הפונקציה בעיגול $x^2+y^2\leq 1$

- בהצלחה -

פתרון של המבחן מועד א' 1997

שאלה 3

א. לפי מבחן לייבניץ טור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ מתכנס לכל $p>0$. לכן מספיק להוכיח כי טור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^p+c_n}-\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$ מתכנס לכל $p>\frac{1}{2}$ ולכל סדרה חסומה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\frac{(-1)^n}{n^p+c_n}-\frac{(-1)^n}{n^p}=\frac{(-1)^{n+1}c_n}{(n^p+c_n)n^p}$$

טענה: $\left|\frac{(-1)^{n+1}c_n}{(n^p+c_n)n^p}\right|\sim\frac{|c_n|}{n^{2p}},\ n\to\infty$

באמת $\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{n^{2p}}:\frac{|c_n|}{\left|n^p(n^p+c_n)\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^p+c_n}{n^p}\right|=1+0=1$

כי $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{n^p}=0$ לכל $p>0$ וכל סדרה $\{c_n\}$ חסומה לכן טור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^p+c_n}-\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$ מתכנס אפילו בהחלט יחד עם טור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|c_n|}{n^{2p}}$ לכל $p>\frac{1}{2}$

ב. ניקח $c_n=(-1)^{n-1}$ סדרה חסומה. נחלק כמו קודם $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\left(\sqrt{n}-(-1)^n\right)\sqrt{n}}$

$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ - מתכנס

מספיק להוכיח כי טור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n}-(-1)^n\right)\sqrt{n}}$ מתבדר

$$\frac{1}{\left(\sqrt{n}-(-1)^n\right)\sqrt{n}}=\frac{\left(\sqrt{n}+(-1)^n\right)}{\left(\sqrt{n}-(-1)^n\right)\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+(-1)^n\right)}=[n\neq 1]=\frac{\left(\sqrt{n}+(-1)^n\right)}{(n-1)\sqrt{n}}=\frac{1}{n-1}+\frac{(-1)^n}{(n-1)\sqrt{n}}$$

טור $\frac{(-1)^n}{(n-1)\sqrt{n}}$ מתכנס, טור $\frac{1}{n-1}$ טור הרמוני מתבדר לפי מבחן לייבניץ

<u>מסקנה סופית</u> $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n-1}+\frac{(-1)^n}{(n-1)\sqrt{n}}$

$\frac{1}{n-1}$ מתבדר, $\frac{(-1)^n}{(n-1)\sqrt{n}}$ מתכנס, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ מתכנס

לכן טור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$ מתבדר

שאלה 4

אינטגרל $\int_0^\infty x^p \sin e^x dx$ מתכנס אם"ם מתכנסים אינטגרלים: $\int_0^1 x^p \sin e^x dx + \int_1^\infty x^p \sin e^x dx$

1. $\int_0^1 x^p \sin e^x dx$ מתכנס יחד עם $\int_0^1 x^p dx$ כי $\frac{x^p \sin e^x}{x^p} \xrightarrow[x\to 0]{} \sin 1 \neq 0$. לכן אינטגרל ראשון מתכנס אם"ם $p > -1$

2. נתבונן באינטגרל $\int_1^\infty x^p \sin e^x dx$. נציב $e^x = t$ ונקבל $\int_e^\infty \frac{\ln^p t}{t} \sin t dt$. נשתמש במבחן דיריכלה באופן הבא:

$f(t) = \frac{\ln^p t}{t}, t \geq e$ $g(t) = \sin t,$ לכל B $\left|\int_e^B g(t)dt\right| \leq 2$. נוכיח כי פונקציה $f(t)$ יורדת לאפס כאשר $t \geq t_0$.

נחשב נגזרת $f'(t) = \frac{\ln^{p-1} t}{t^2}(p - \ln t) < 0 (t \to \infty, p \neq 0)$

אם $p = 0$ אזי $f'(t) = -\frac{1}{t^2} < 0$

$f'(t) < 0$ אומר כי $f(t)$ יורדת. קל לבדוק ש- $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ לפי לופיטל. אזי מבחן דיריכלה נותן שאינטגרל שני מתכנס לכל ערך p .

<u>תשובה:</u> אינטגרל מתכנס אם"ם $p > -1$

שאלה 5

מספיק להוכיח שטור $\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln^2 n}{n} x \sin x$ מתכנס במדה שווה בקטע סגור $[0,\pi]$ מכיוון שסכום של טור של פונקציות רציפות המתכנס במידה שווה הוא פונקציה גם רציפה. נשתמש במבחן דיריכלה כאשר $a_n(x) = \frac{\ln^2 n}{n}, b_n(x) = \sin x$ ידוע כי

$\sum_{k=1}^\infty \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$ לכן $\left|\sum_{k=1}^\infty x \sin kx\right| = \left|\sum_{k=1}^\infty b_k(x)\right| \leq \frac{x}{\sin\frac{1}{2}x}$ נגדיר כי $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$ ופונקציה $\frac{x}{\sin\frac{1}{2}x}$

עולה בקטע $[0,\pi]$ לכן $\left|\sum_{k=1}^\infty b_k(x)\right| \leq 2\pi$ לכל $x \in [0,\pi]$. נראה עכשיו שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ גם מקיימת תנאים של מבחן דיריכלה.

נגדיר פונקציה $\varphi(t) = \frac{\ln^2 t}{t}$ אזי לפי לופיטל $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$. נחשב הנגזרות $\varphi'(t) = \frac{\ln t}{t^2}(2 - \ln t) < 0, t \to \infty$

כל התנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים וטור מתכנס במדה שווה בקטע $[0,\pi]$

שאלה 6

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\ln\left(x^2+y^2\right)}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

א. פונקציה $f(x,y)$ רציפה בנקודה $(0,0)$ אם $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=f(0,0)=\lim\limits_{\rho\to 0} f(x,y),\rho=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\ln\left(x^2+y^2\right)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho}{\ln\rho^2}=0=f(0,0)$$

פונקציה $f(x,y)$ רציפה בנקודה $(0,0)$

ב. $f_x^{'}(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sqrt{\Delta x^2}}{\ln\left(\Delta x^2\right)}-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{|\Delta x|}{\ln\left(\Delta x^2\right)}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{sign\Delta x}{\ln\left(\Delta x^2\right)}=0$

באותו אפן מקבלים $f_y^{'}(0,0)=0$

$$\Delta z=\Delta f(0,0)=f_x^{'}(0,0)\Delta x+f_y^{'}(0,0)\Delta y+\varepsilon\rho=\varepsilon\rho$$

$$\Delta z=\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\ln\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)}=\frac{\rho}{\ln\rho^2}=\varepsilon\rho,\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

$$\varepsilon=\frac{1}{\ln\rho^2}\Rightarrow\lim_{\rho\to 0}\varepsilon=0$$

זאת אומרת שהפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$

שאלה 7

א. $f(x,y)=\frac{1}{3}x^3-3x+y^2$ ונמצא את הערכה הכי גדול בתחום $x^2+y^2\le 1$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=x^2-3=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2y=0\end{cases};\Rightarrow\begin{cases}x=\pm\sqrt{3}\\ y=0\end{cases}$$

ובכן יש 2 נקודות חשודות $M_1(\sqrt{3},0);M_2\left(-\sqrt{3},0\right);$

$$f_{xx}^{''}(x,y)=2x;\ f_{yy}^{''}(x,y)=2;\ f_{xy}^{''}(x,y)=0$$

$$\Delta=4x\quad if\quad x=-\sqrt{3}\Rightarrow\Delta<0;$$

$$if\quad x=\sqrt{3}\Rightarrow\Delta>0$$

אזי M_1 אינה נק' קיצון ו M_2 נק' מינימום

ב. בתחום $x^2+y^2\le 1$ אין נקודות קיצון. זאת אומרת שהערך הקטן ביותר והערך הגדול ביותר צריך לחפש על השפה

$$x^2+y^2=1\quad\left(y=\pm\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$g(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1\quad x\in\left[-1,1\right]$$

$$g'(x)=x^2-2x-3=0$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow x_1=-1;x_2=3$$

הנקודה x_2 נמצאת מחוץ לקטע $[-1,1]$ הנקודה x_1 היא אינה נקודה פנימית של קטע $[-1,1]$. הערכים הגדול ביותר והקטן ביותר מחפשים בקצוות הקטע

$$g(-1)=\frac{8}{3};g(1)=-\frac{8}{3}$$

$$I_2:\begin{cases}x=0\\0\le y\le \ln 2\end{cases}$$

$$g(y)=8-2+1+e^y-ye^2=e^y-ye^2+7$$

$$g'(y)=e^y-e^2=0\Leftrightarrow y=2$$

$(2,2)$ לא שייך לתחום. נחשב בקצוות

$$y=0:g(0)=8$$

$$y=\ln 2:g(\ln 2)=2-\ln 2e^2+7\approx 3.8$$

$$I_2:\begin{cases}y=\ln x\\1\le x\le 2\end{cases}$$

$$g(x)=2x^2-x+1+x-\ln x\cdot e^2=2x^2+1-\ln x\cdot e^2$$

$$g'(x)=4x+\frac{1}{x}e^2=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}e$$

רק $x=\frac{1}{2}e$ שייך לתחום.

$$g\left(\frac{1}{2}e\right)=2\frac{e}{4}-(1-\ln 2)\cdot e^2+1\approx 2.5$$

$$x=1:g(1)=3$$

$$x=2:g(2)\approx 3.8$$

הערך הכי קטן בנקושה $\left(\frac{e}{2},\ln\left(\frac{e}{2}\right)\right)$

הערך הכי גדול בנקודה $(2,0)$