אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

מס' הנבחן:_____________

תאריך הבחינה: 21.07.1996
שם המורה: בליצקי, ליידרמן
מבחן ב: חדו"א א2
מס' הקורס: 201-1-0021-2
מיועד לתלמידי: מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה: א', סמ': ב', מועד: ב'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: מחשב כיס עם צג קטן בלבד

ענה על 5 שאלות. חובה לענות על שאלה ראשונה. כל התשובות תהיינה מלאות ומנומקות היטב.

השאלות:

1. (20 נקודות) נסח והוכח את המשפט על דיפרנציאביליות של פונקציה $z = z(x, y)$ בנקודה. (תנאי מספיק לדיפרנציאביליות)

2. (26 נקודות) חקור את ההתכנסות האינטגרל $\int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{x^\beta}\right) x^\alpha dx$

א. בהחלט

ב. בתנאי

3. (26 נקודות) תהיה $f(x, y)$ פונקציה מוגדרת ורציפה בכל נקודה $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. תהינה ריבוע שלה פונקציה $g(x, y) = f^2(x, y)$ בעלת נגזרות חלקיות מסדר ראשון ושני:
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ בכל נקודה (x, y) והן רציפות בכל נקודה $(0,0)$. הוכח שאם פונקציה $f(x, y)$ מקיימת את התכונה $f(tx, ty) = tf(x, y)$ לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ולכל t ממשי, אז $f(x, y) = \sqrt{Ax^2 + Bxy + Cy^2}$, כאשר A, B, C קבועים.

4. (18 נקודות) נתון הטור החזקות $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^2}{x^2 + n^2} \cos(2n\pi x)$.

א. הוכח שהסכום של טור הזה הוא פונקציה רציפה,

ב. הוכח שבקטע אין-סופי $(-\infty, \infty)$ טור לא מתכנס במדע שווה.

5. (18 נקודות) נתון הטור החזקות - $\sum_{n=1}^\infty \left(\ln^\alpha(n+1) - \ln^\alpha n\right) x^n$, כאשר $\alpha = \frac{1}{2}$

א. חשב עבורו את הרדיוס ההתכנסות

ב. חקור את התכנסות הטור בקצוות של קטע ההתכנסות.

6. (18 נקודות) נתונה פונקציה: $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{y}{x} - y^2 \sin\frac{x}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$.

א. האם $f(x, y)$ פונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$,

ב. האם $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

7. (18 נקודות) באמבטיה נפח V. צורתה התיבה הפתוחה מלמעלה (כלומר לאמבטיה 5 פאות). מצא אורך שלושת המקצועות התיבה שעבורם שטח מעטפת התיבה מינימלית. יש להכיח שהנקודה שמצאת היא נקודת מינימום.

פתרון של המבחן מועד ב' 1996

שאלה 2

במקרה $\beta = 0$ $\int_0^\infty x^\alpha dx$ מתבדר לכל α.

במקרה $\beta \neq 0$ נעשה הצבה $t = \frac{1}{x^\beta}$, ונקבל אינטגרל $p = \frac{\alpha+\beta+1}{\beta}$, $\frac{1}{\beta}\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^p} dt,$. נחלק אינטגרל ל-2 קטעים: $\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^p} dt = \int_0^1 \frac{\cos t}{t^p} dt + \int_1^\infty \frac{\cos t}{t^p} dt$

$\int_0^1 \frac{\cos t}{t^p} dt \sim \int_0^1 \frac{1}{t^p} dt$-לכן מתכנס אם"ם $p < 1$

אינטגרל $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^p} dt$ מתכנס בנחלט אם"ם $p > 1$:

$$\int_1^\infty \frac{|\cos t|}{t^p} dt \ge \int_1^\infty \frac{\cos^2 t}{t^p} dt = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1+\cos 2t}{t^p} dt = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{t^p} dt + \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos 2t}{t^p} dt,$$

$\int_1^\infty \frac{1}{t^p} dt$ מתכנס אם"ם $p > 1$, $\int_1^\infty \frac{\cos 2t}{t^p} dt$ מתכנס אם"ם $p > 0$ לפי מבחן דיריכלה.

תוצאה: האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^p} dt$ לא מתכנס בהחלט לאף p כי $p > 1$ ו-$p < 1$ לא יתכן ביחד.

האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^p} dt$ מתכנס בתנאי אם"ם $0 < p \le 1$ לפי מבחן דיריכלה. לכן האינטגרל כולו מתכנס בתנאי גם עבור $0 < p < 1$.

תשובה:האינטגרל לא מתכנס לאף α, β. האינטגרל מתכנס בתנאי אם"ם: $\begin{cases} \beta \neq 0 \\ 0 < \frac{\alpha+\beta+1}{\beta} < 1 \end{cases}$

שאלה 3

$g(x,y) = f^2(x,y)$, מכיוון ש- $f(tx,ty) = t \cdot f(x,y)$ אז $g(tx,ty) = t^2 g(x,y)$. נמצא $g(x,y)$. נקבע נקודה (x,y) ונגדיר פונקציה מורכבת של משתנה t באופן הבא: $F(t) = g(tx,ty), u = tx, v = ty$. נגזרות חלקיות של פונקציה $g(x,y)$ עד סדר שני קיימות ורציפות ב- $(0,0)$, לכן אפשר לחשב $F''(0)$ לפי כלל שרשרת. נשים לב כי: $v'(t) = y, u'(t) = x, v''(t) = 0, u''(t) = 0$,

$F''(t)\big|_{t=0} = \left[\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \cdot x^2 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\right) xy + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \cdot y^2\right]\Bigg|_{t=0}$, אבל $F''(t) = 2g(x,y)$, לכן

$g(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, כאשר $A = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0,0), B = \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(0,0), C = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(0,0)$.

$f(x,y)$ זה שורש ריבועי מ- $g(x,y)$. כיון ש- $f(x,y)$ פונקציה רציפה אז יש רק שתי אפשרויות:
$f(x,y)=\sqrt{Ax^2+Bxy+Cy^2}$ או $f(x,y)=-\sqrt{Ax^2+Bxy+Cy^2}$.

<u>שאלה 4</u>

טור מתכנס במדה שווה בכל קטע סופי $[a,b]$.

$$\left|\frac{x^2}{x^2+n^2}\cos(2n\pi x)\right|\le\frac{x^2}{n^2}\le\frac{C}{n^2}$$

לכל $x\in[a,b]$, כאשר $C=\max\{|a|,|b|\}$. טור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^2}$ מתכנס, לכן טור ש kפונקציות מתכנס במדה שווה לפי קריטריון של וירשטרס. סכום שלטור של פונקציות רציפות אשר מתכנס במדה שווה גם פונקציה רציפה .

בקטע אין-סופי $(-\infty,\infty)$ טור לא מתכנס במדה שווה. אם טור מתכנס במדה שווה אזי $\left|f_n(x)\right|<\varepsilon$ אבל אצלינו $f_n(n)=\frac{1}{2}$

לכל n. לכן להפוך: $f_n(x)=\frac{1}{2}>\frac{1}{4}\quad \exists x=N\quad \forall n=N\quad \exists\varepsilon=\frac{1}{4}$

<u>שאלה 5</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln^{\alpha}(n+1)-\ln^{\alpha}n\right)x^n$$

נסמן $a_n=\sqrt{\ln(n+1)}-\sqrt{\ln n},\ f(t)=\sqrt{\ln(t+1)}-\sqrt{\ln t},t\ge1$ כלומר $a_n=f(n)$. $f(t)\sim\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln t}},t\to\infty$

במובן ש- $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln t}}}=1$

$$f(t)=\frac{\ln(t+1)-\ln t}{\sqrt{\ln(t+1)}+\sqrt{\ln t}}=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\ln(t+1)}-\sqrt{\ln t}}\sim\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln t}}$$

א. נחשב את רדיוסההתכנסות לפי נוסחת דלמבר : $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\sqrt{\ln(n+1)}}{\sqrt{\ln n}}\right|=1$

ב. אם $x=1$ אז נקבל טור מספרי $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n\sqrt{\ln n}}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln^{\alpha}(n+1)-\ln^{\alpha}n\right)$. טור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n\sqrt{\ln n}}$ מתבדר לפי מבחן האינטגרלי: פונקציה $g(t)=\frac{1}{t\sqrt{\ln t}}$ יורדת באופן מונוטוני לאפס, כאשר $t\ge2$ ו- $g(n)=\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$
$\int_2^{\infty}g(t)dt=2\sqrt{\ln t}\Big|_2^{\infty}=\infty$. לכן טור המקורי מתבדר ב- $x=1$.

אם $x=-1$ אז טור עם סימנים מתחלפים. נבדוק שטור הזה מקיים את התנאים של מבחן ליבניץ.
$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\sqrt{\ln n}}=0$. נוכיח כי פונקציה $f(t)$ יורדת באופן מונוטוני

$\sqrt{\ln t} < \sqrt{\ln(t+1)}, t < t+1$ כי $f'(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(t+1)\sqrt{\ln(t+1)}} - \frac{1}{t\sqrt{\ln t}}\right] = \frac{t\sqrt{\ln t} - (t+1)\sqrt{\ln(t+1)}}{2\sqrt{\ln t}\sqrt{\ln(t+1)}} < 0$

תשובה: טור מתבדר ב- $x = 1$, טור מתכנס בתנאי ב- $x = -1$

<u>שאלה 6</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{y}{x} - y^2 \sin\frac{x}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$$

א. $|f(x,y)| \le x^2\left|\sin\frac{y}{x}\right| + y^2\left|\sin\frac{x}{y}\right| \le x^2 + y^2$ לכן $\vartriangle f \le (\vartriangle x)^2 + (\vartriangle y)^2 = \rho^2$ לכן פונקציה $f(x,y)$ רציפה בנקודה $(0,0)$

ב. $f_x'(x,y) = \lim\limits_{\substack{\vartriangle x \to 0 \\ y=0}} \frac{f(\vartriangle x, 0) - f(0,0)}{\vartriangle x} = 0$. באותו אפן מקבלים $f_y'(0,0) = 0$

ג. $f_x'(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy\sin\left(x^2+|y|^\alpha\right) - 2x^3\cos\left(x^2+|y|^\alpha\right)}{\sin\left(x^2+|y|^\alpha\right)}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$ אם $0 \le \alpha < 2$ אזי

$0 \le \left|f_x'(x,y)\right| \le \frac{|2xy|}{\left|\sin\left(x^2+|y|^\alpha\right)\right|} - \frac{\left|2x^3y\right|}{\sin\left(x^2+|y|^\alpha\right)}$ נעבור לגבול לפי $x \to 0, y \to 0$:

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{|2xy|}{\left|\sin\left(x^2+|y|^\alpha\right)\right|} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{|2xy|}{\left|\left(x^2+|y|^\alpha\right)\right|}, 0 \le \frac{|2xy|}{\left|\left(x^2+|y|^\alpha\right)\right|} \le \frac{2x|y|^{\frac{\alpha}{2}}}{\left|\left(x^2+|y|^\alpha\right)\right|} \cdot |y|^{1-\frac{\alpha}{2}} \le |y|^{1-\frac{\alpha}{2}} \xrightarrow[y\to0]{} 0$ לכן

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{|2xy|}{\left|\sin\left(x^2+|y|^\alpha\right)\right|} = 0$ אם $0 \le \alpha < 2$,

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{\left|2x^3y\right|}{\sin\left(x^2+|y|^\alpha\right)} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{\left|2x^3y\right|}{\left(x^2+|y|^\alpha\right)} \le \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{|2xy|}{\sin\left(x^2+|y|^\alpha\right)} = 0$ בסופו של דבר $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f_x'(x,y) = 0$ אם $0 \le \alpha < 2$.

אם אם $\alpha \ge 2$ אז נקח פעם סדרה אם $\begin{cases} x_n = 0 \\ y_n = \frac{1}{n} \end{cases}$, אז $f_x'(x,y) = 0$. פעם שניה סדרה תהיה כך ש-

$f_x'(x,y) = \frac{2tx^2}{\sin\left(x^2(1+t^\alpha\right)} - \frac{2tx^{3+\frac{\alpha}{2}}\cos\left(x^2(1+t^\alpha)\right)}{\sin\left(x^2(1+t^\alpha\right)}$ $y_n = tx_n^{2/\alpha}, t > 0$ אם $\alpha > 2$ אזי איבר שני שווה ל- ∞ , כאשר $x \to 0$

כי $3 + \frac{2}{\alpha} < 4$.אם $\alpha = 2$ אזי $\lim\limits_{x\to0} f_x'(x,y) = \frac{2t}{1+t^2} - \frac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}$ תלוי ב- t . אם $t = 1$ אז נקבל $\lim\limits_{x\to0} f_x'(x,y) = \frac{1}{2} \neq 0$

שאלה 7

נסמן המקצועות התיבה ע"י x,y,z , נפח $V=xyz$, שטח המעטפת $(1)\quad S=2(xz+yz)+xy$. נתון ש- $z=\dfrac{V}{xy}$.

נציב ב- (1) . נקבל $S(x,y)=2V\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)+xy,\ x>0,\ y>0$. נמצא נקודות קיצון:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial x}=-2V\dfrac{1}{x^2}+y=0\\ \dfrac{\partial S}{\partial y}=-2V\dfrac{1}{y^2}+x=0\end{cases}\Rightarrow x=y=\sqrt[3]{2V}$$

לכן $z=\dfrac{V}{\sqrt[3]{4V^2}}$ עבור $x=y=\sqrt[3]{2V}$. ערך של $S(x,y)$ $: S(x,y)>S_0,\forall(x,y)\in D\setminus F$ $S_0=3\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{V^2}$. נבדוק שבנקודה $x=y=\sqrt[3]{2V}$ פונקציה $S(x,y)$ מקבלת מינימום לוקלי: $\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2}=4V\dfrac{1}{x^3};\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial y^2}=4V\dfrac{1}{y^3};\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial x\partial y}=1$. אז נקבל בנקודה $x=y=\sqrt[3]{2V}$ את המטריצה: $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ לכן הנקודה – נקודת מינימום. אבל ידוע לנו בינתיים שזאת הנקודה של מינימום לוקלי, צריך להוכיח כי בתחום פונקציה $S(x,y)$ מקבלת ערך הכי קטן בנקודה הזאת. נסמן תחום : $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, y>0\right\}$. D קבוצה לא קומפקטית. נגדיר תת-קבוצה $F\subset D$, שמקיימת תכונות הבאות:

א. F קבוצה קומפקטית

ב. נקודה $M\left(\sqrt[3]{2V},\sqrt[3]{2V}\right)$ שייכת ל- F

ג. $S(x,y)>S_0\quad\forall(x,y)\in D\setminus F$

הגדרה של F : $\begin{cases}x\ge\dfrac{2V}{S_0}\\ y\ge\dfrac{2V}{S_0}\\ xy\le S_0\end{cases}$

קל לבדוק שקבוצה F ממש מקיימת תכונות א-ג כנ"ל , לכן $\min\limits_{x,y\in D}S(x,y)=\min\limits_{x,y\in F}S(x,y)=S_0$ כי מצאנוקודם שפונקציה $S(x,y)$ בעלת נקודת מינימום לוקלי יחידה בלבד. והיא דווקא נקודה $M\left(\sqrt[3]{2V},\sqrt[3]{2V}\right)$