

בחינה בחדו"א 2 למדמ"ח והנדבת תוכנה, תאריך 20.07.2021, מועד א'
מספר הקורס: 201-1-2371, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: פרופ' ארקדי ליידרמן

- משך הבחינה: 3 שעות
- יש לענות על כל 5 שאלות. משקל של כל שאלות הוא 20 נקודות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- אין להשתמש בחומר עזר פרט למחשבון פשוט ללא צג גרפי.
- בכל שאלה/סעיף (פרט לסעיף הבונוס) ניתן לכתוב "לא יודעת" ולקבל 20% מהנקודות.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודעת" לא ייבדקו.

מספר הנבחן _____

שאלה 1.

(20 נקודות) נתון אינטגרל לא אמתי $\int_1^{\infty} \sin x \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$. חקרו האם הוא מתכנס בהחלט או בתנאי, או מתבדר.

שאלה 2. נתון הטור $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2 + x}$, כאשר $x \geq 0$.

- (א) (10 נקודות) הוכיחו שפונקציה $S(x)$ מוגדרת ורציפה לכל $x \geq 0$.
 (ב) (10 נקודות) חקרו האם טור מתכנס במישהו שווה בתחום $X = \{x : x \geq 0\}$.
 (ג) (בונוס - 10 נקודות) הוכיחו שפונקציה $S(x)$ גזירה ברציפות בתחום $X = \{x : x \geq 0\}$.

שאלה 3. (א) (10 נקודות) חשבו ערך של נגזרת כיוונת של פונקציה $f(x, y) = (x + y) \ln(x^2 + y^2 + 1)$ בכיוון של וקטור $\vec{a} = (3, -4)$ בנקודה $M(1, 1)$.

(ב) (10 נקודות) תהי $f(t)$ פונקציה גזירה לכל t . נגדיר $u(x, y) = f(y^2 e^x)$.

$$2 \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

מצאו ערך של ביטוי

שאלה 4. (א) (10 נקודות) האם לפונקציה $f(x, y) = xy - y^2$ יש נקודות קיצון מקומי במישור?

(ב) (10 נקודות) מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה $f(x, y) = xy - y^2$ בתחום

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, |y| \leq x^2\}$$

שאלה 5. (א) (10 נקודות) החליפו את סדר האינטגרציה באינטגרל הבא $\int_0^1 dx \int_{x^3-2}^{4-\ln(x+1)} f(x, y) dy$

(ב) (10 נקודות) חשבו את הנפח של הגוף $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq x^2 + 2y^2 + 1\}$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

כאשר התחום

בהצלחה!

20.07.2021

20.07.21

עבודת בית לשיעור 2, 20.07.21

האם יש פונקציה שהיא $\ln x$ ויש לה גבול?

$f(x) = \ln x$; $g(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \dots$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

לכן $x > e^2$ נדרש להוכיח את הפונקציה $g(x)$

$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} < 0$

הפונקציה $x > e^2$ היא פונקציה יורדת.

$\ln^2 x \leq |\ln x|$ (ההוכחה) כי $\ln x$ הוא פונקציה יורדת.

$0 \leq \frac{1 - \cos 2x}{2\sqrt{x}} = \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} \leq |\ln x| \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$\int_1^\infty \frac{1 - \cos 2x}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx - \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}} dx$

האם יש פונקציה שהיא $\ln x$ ויש לה גבול?

השאלה: האם יש פונקציה שהיא $\ln x$ ויש לה גבול?

האם יש פונקציה שהיא $\ln x$ ויש לה גבול?

07.01.2021

$\|\vec{a}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$. \vec{a} נורמל δ ו e (כ) 3) δ א e

$\vec{l} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \cdot \ln(x^2 + y^2 + 1) + (x+y) \cdot \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \cdot 2x$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \ln(3) + \frac{4}{3}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \ln(3) + \frac{4}{3}$ ה'ג' (N6) δ δ

$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(1,1) = \langle \text{grad } f|_M, \vec{l} \rangle = -\frac{1}{5} \left(\ln(3) + \frac{4}{3} \right)$: ה'ה' א

$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(t) \cdot y^2 e^x$ ה'ה' א δ δ (א)

$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(t) \cdot 2y e^x$

2 $\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = f'(t) (2y^2 e^x - 2y^2 e^x) = 0$: ה'ה' א

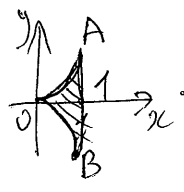
$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow P_0(0,0)$ (כ) 4) δ א e
ה'ה' א ה'ה' א ה'ה' א
ה'ה' א ה'ה' א ה'ה' א

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$

$\Delta = -1 < 0$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

ה'ה' א δ δ ה'ה' א
 ה'ה' א $P_0(0,0)$ ה'ה' א

$f(P_0) = f(0,0) = 0$ (א)



ה'ה' א δ δ ה'ה' א ה'ה' א ה'ה' א ה'ה' א

$$g(y) = y - y^2$$

$$g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$x=1, -1 \leq y \leq 1 \quad (1)$$

נ"ב, נ"ב

$$g(-1) = f(1, -1) = -2$$

$$g(1) = f(1, 1) = 0$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$g(x) = x^3 - x^4$$

$$y = x^2, 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

$$g'(x) = 3x^2 - 4x^3$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{3}{4}$$

$$g\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) = \frac{27}{256} < \frac{1}{8}$$

$$g(x) = -x^3 - x^4$$

$$g'(x) = -3x^2 - 4x^3$$

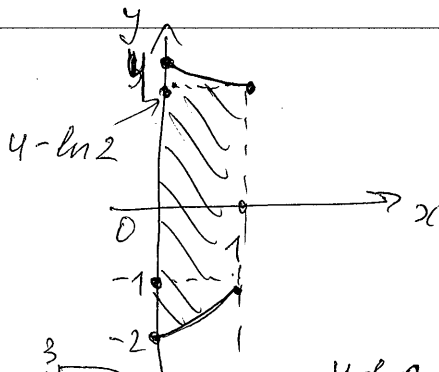
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -\frac{3}{4}$$

פונקציה יורדת

$$y = -x^2, 0 \leq x \leq 1 \quad (3)$$

$$f(1, -1) = -2 \quad : D \text{ פונקציה } / \text{ נ"ב, נ"ב } \text{ של } \text{ } \underline{\text{נ"ב, נ"ב}}$$

$$f\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad : D \text{ פונקציה } / \text{ נ"ב, נ"ב } \text{ של } \text{ } \underline{\text{נ"ב, נ"ב}}$$



(K) 5 נ"ב

$$y = x^2 - 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y+2}$$

$$y = 4 - \ln(x+1) \Leftrightarrow x = e^{4-y} - 1$$

$$\iint = \int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{y+2}} f(x,y) dx + \int_{-1}^{4-\ln 2} dy \int_0^1 f(x,y) dx + \int_{4-\ln 2}^4 dy \int_0^{e^{4-y}-1} f(x,y) dx$$

: נ"ב, נ"ב

$$V = \iint_D (x^2 + 2y^2 + 1) dx dy = \quad (2) \quad \underline{\underline{5,16\pi}}$$

מ'רסו נכנסת ונכנסת, נכנסת ונכנסת

$$x^2 + y^2 + 1 = r^2 + r^2 \sin^2 \varphi + 1; \quad J(r, \varphi) = r \quad | \text{כ'נ'ר'ר'ר' } | \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$V = \iint_{\substack{0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} (r^2 + r^2 \sin^2 \varphi + 1) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (r^3 + r^3 \sin^2 \varphi + r) dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^4}{4} \sin^2 \varphi + \frac{r^2}{2} \right) \Big|_{r=0}^2 = \int_0^{2\pi} (4 + 4 \sin^2 \varphi + 2) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(6 + 4 \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} (8 - 2 \cos 2\varphi) d\varphi = \underline{\underline{16\pi}}$$