אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

הפקולטה למדעי הטבע
המחלקה למתמטיקה

בחינה בחשבון אינפיניטסימלי 2, תאריך 07.01.2021, מועד א'
מספר הקורס: 201-1-0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: פרופ' ארקדי ליידרמן

- משך הבחינה: 3 שעות
- יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. משקל של כל שאלות הוא 25 נקודות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- אין להשתמש בחומר עזר **פרט למחשבון פשוט ללא צג גרפי.**
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב **"לא יודע\ת"** ולקבל 20% מהנקודות.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע\ת" לא ייבדקו.

מספר הנבחן ____________________

שאלה 1 (25 נקודות) בעזרת תכונות של אינטגרל רימן חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)-\ln n}{n+k}$.

שאלה 2 נתון כי פונקציה $f(x)$ רציפה ואינטגרל לא אמתי $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס.

(א) (15 נקודות) הוכיחו כי אינטגרל $\int_1^\infty f(x^2)dx$ גם מתכנס

(ב) (10 נקודות) האם אינטגרל $\int_1^\infty f^2(x)dx$ בהכרח מתכנס?

שאלה 3 נתון הטור $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2+x}$, כאשר $x\ge 0$.

(א) (10 נקודות) הוכיחו שפונקציה $S(x)$ מוגדרת ורציפה לכל $x\ge 0$.

(ב) (15 נקודות) חקרו האם טור מתכנס במישה שווה בתחום $X=\{x:x\ge 0\}$.

(ג) (בונוס - 10 נקודות) הוכיחו שפונקציה $S(x)$ גזירה ברציפות בתחום $X=\{x:x\ge 0\}$.

שאלה 4 (25 נקודות) נניח כי $f(t):R\to R$ פונקציה גזירה ומקיימת תנאי $f(t)\neq 0$ לכל t. נגדיר פונקציה של שני משתנים $F(x,y)=\int_0^{ax^2+by^2} f(t)dt$. חקרו עבור איזה ערכים של קבועים $a\neq 0, b\neq 0$ לפונקציה $F(x,y)$ יש נקודת אקסטרמום מקומי במישור.

שאלה 5 (25 נקודות) נניח כי קבוצה $D\subset R^3$ מקיימת את התכונה הבאה:
לכל פונקציה רציפה $f:D\to R$ תחום ערכים של f חסום. הוכיחו כי קבוצה D קומפקטית.

בהצלחה!

07.01.2021

פתרון של מבחן באינפי 2, 07.01.2021

שאלה 1

$$\ln(n+k)-\ln n=\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)-\ln n}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{1+\frac{k}{n}}$$

כי בעצם סכום אינטגרל של פונקציה $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ בקטע $[1,2]$, כאשר קטע מחולק ל n קטעים שווים.

$f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[1,2]$, לכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{1+\frac{k}{n}}=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\frac{\ln x}{x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_1^2=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

שאלה 2 (א)

$$\int_1^\infty f(x^2)\,dx=\left\{\begin{matrix}\text{הצבה}\\ x=\sqrt{t}\\ dx=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}dt\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^\infty f(t)\frac{1}{\sqrt{t}}dt$$

אינטגרל זה מתכנס על פי מבחן דיריכלה

כי $g(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\xrightarrow[t\to\infty]{}0$ יורדת מונוטונית ל 0

ו $\int_1^\infty f(t)dt$ מתכנס, לכן יש קבוע $M>0$ כך ש $\left|\int_1^x f(t)dt\right|<M$ לכל $x\geq 1$.

(ב) לא. דוגמא נגד $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

אז $\int_1^\infty\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ מתכנס על פי מבחן דיריכלה,

אבל $\int_1^\infty\frac{\sin^2 x}{x}dx$ מתבדר. למדנו בשיעורים.

שאלה 3 (א) יהי $a>0$ מספר כלשהו.
אנחנו נוכיח כי טור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2+x}$ מתכנס במידה שווה בקטע $[0,a]$.

פונקציה $\frac{x}{n^2+x}=1-\frac{n^2}{n^2+x}$, $x>0$ מונוטונית עולה כי $\frac{n^2}{n^2+x}$ מונוטונית יורדת, לכן

$$\forall n \ \forall x\in[0,a] \ \left|\frac{x}{n^2+x}\right| \le \frac{a}{n^2+a} < \frac{a}{n^2}$$

טור מספרי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^2}$ מתכנס, לכן טור של פונקציות מתכנס במידה שווה בקטע $[0,a]$ ולכן $S(x)$ מוגדרת ורציפה לכל $x\in[0,a]$.
$a>0$ שרירותי, לכן $S(x)$ מוגדרת ורציפה לכל $0\le x$.

(ב) אם טור של פונקציות מתכנס במידה שווה בתחום $X=\{x: x\ge 0\}$ אז $R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ במידה שווה בתחום X, כאשר $R_n(x)$ זו שארית של טור:

$$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x}{k^2+x}$$

אבל $R_n\left((n+1)^2\right)\ge\frac{1}{2}$ לכל n.

באמת $R_n(x)$ זו סכום של מחוברים חיוביים, לכן ערך של $R_n(x)$ הוא לפחות כערך של מחובר $\frac{x}{(n+1)^2+x}$. עבור $x=(n+1)^2$ ערך של הביטוי זה $=\frac{1}{2}$.

$$\sup_{x\in[0,\infty)}|R_n(x)|\ge\frac{1}{2}$$

לכן $R_n(x) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ במידה שווה ב $X=[0,\infty)$.

(ג) נגזרת $\left(\frac{x}{n^2+x}\right)' = \frac{n^2}{(n^2+x)^2}$. והי' רצפ .

$\forall x\in[0,a] \qquad \frac{n^2}{(n^2+x^2)^2} \le \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$

לכן טור שמתקבל מטור המקורי על ידי גזירה איבר-איבר מתכנס במידה שווה בקטע $[0,a]$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2+x)^2} = \varphi(x)$ במידה שווה ב-$[0,a]$

כל התנאים של משפט על גזירה איבר-איבר של טור פונקציות שנלמד בקורס מתקיימים ולכן $\varphi(x) = S'(x)$ לכל $x\in[0,a]$

צ"ל $\varphi(x)=S'(x)$ לכל $x \geq a$.

$S'(x)$ רציפה גם כי $\varphi(x)$ רציפה כסכום של טור של פונקציות רציפות שמתכנס במידה שווה.

<u>שאלה 4</u> על פי המשפט היסודי של חדו"א ועל פי כלל שרשרת

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = f(ax^2+by^2)\cdot 2ax \\ \frac{\partial F}{\partial y} = f(ax^2+by^2)\cdot 2by \end{cases}$$

$f(t)\neq 0$ על פי הנחה, לכן

$\frac{\partial F}{\partial x}=0 \; ; \; \frac{\partial F}{\partial y}=0 \Leftarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$

$(0,0)$ זו נקודה חשודה לקיצון יחידה.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f'(ax^2+\cancel{b}y^2)\cdot(2ax)^2 + f(ax^2+by^2)\cdot 2a$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f'(ax^2+by^2)\cdot(2by)^2 + f(ax^2+by^2)\cdot 2b$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = f(ax^2+by^2)\, 4ab\, xy$$

בנקודה $(0,0)$ מקבלים כי

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = f(0)\cdot 2a \\ C &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0,0) = f(0)\cdot 2b \\ B &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad D = \det\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = (f(0))^2\, 4ab > 0$$

תנאי מספיק לקיצון אם ורק אם

או 1) $a>0$, $b>0$ או 2) $a<0$, $b<0$

<u>שאלה 5</u> ראשית נתבונן בפונקציה רציפה

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

נתון כי $f: D \to \mathbb{R}$ חסומה, לכן קיים קבוע $M>0$

כך ש $x^2+y^2+z^2 < M$ לכל $(x,y,z)\in D$ צ"ל

D מוכלת בתוך כדור עם רדיוס $r=\sqrt{M}$, צ"ל

D קבוצה חסומה.

נניח עכשיו בשלילה כי D קבוצה לא סגורה.

אז יש סדרה $\{P_n(x_n,y_n,z_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ כך ש

$$P_n(x_n,y_n,z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0(x_0,y_0,z_0)$$

אבל $P_0 \notin D$.

נגדיר פונקציה רציפה ב D באופן הבא:

$$f: D \to R$$

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

אז $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = \infty$, צ"ל f לא חסומה

בניגוד להנחה.

ומכאן, D קבוצה גם סגורה וגם חסומה, לכן

D קבוצה קומפקטית.