אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev
הפקולטה למדעי הטבע
המחלקה למתמטיקה

בחינה בחשבון אינפיניטסימלי 2, תאריך 06.07.2020, מועד א'
מספר הקורס: 201-1-0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: פרופ' ארקדי ליידרמן

- משך הבחינה: 3 שעות
- יש לעבות על 4 מתוך 5 שאלות. משקל של כל שאלות הוא 25 נקודות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- **אין להשתמש בחומר עזר פרט למחשבון פשוט ללא צג גרפי.**
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב "**לא יודע\ת**" ולקבל 20% מהנקודות.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע\ת" לא ייבדקו.

מספר הנבחן ____________________

שאלה 1 (25 נקודות) הוכיחו כי קיים גבול סופי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=C$ ומצאו את הערך של C.

שאלה 2 נתון הטור $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n+n^2x^2}$.

(א) (10 נקודות) חקרו האם טור מתכנס במידה שווה בתחום $X=\{x\neq 0\}$.

(ב) (15 נקודות) הוכיחו שפונקציה $S(x)$ מוגדרת ורציפה לכל $x\neq 0$.

שאלה 3 (25 נקודות) הפונקציה $f(x,y)$ מוגדרת בתחום $x^2+y^2<1$ על ידי הנוסחה

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2+y^2)^{\alpha}}{\ln(x^2+y^2)}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

מצאו את כל הערכים של α כך שפונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

שאלה 4 (25 נקודות) נניח כי $f(t):R\to R$ פונקציה גזירה ומקיימת תנאי $f(t)\neq 0$ לכל t. נגדיר פונקציה של שני משתנים $F(x,y)=\int_0^{xy}f(t)dt$. חקרו האם לפונקציה $F(x,y)$ יש נקודת אקסטרמום מקומי במישור.

שאלה 5 יהי $D\subset R^2$ תחום הגדרה קומפקטי של פונקציה $f:D\to R$.

נסמן על ידי Γ_f גרף של f - תת-קבוצה הבאה של R^3: $\Gamma_f=\{(x,y,z)\in R^3 : z=f(x,y),\quad (x,y)\in D\}$.

(א) (15 נקודות) הוכיחו שאם f פונקציה רציפה בתחום D אז Γ_f היא קבוצה קומפקטית.

(ב) (10 נקודות) הוכיחו שאם Γ_f קבוצה קומפקטית אז f פונקציה רציפה בתחום D.

בהצלחה!

06.07.2020 , פתרונות של ממן באינפי 2

שאלה 1

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\right)$$

נגדיר פונקציית עזר $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ בתחום $[0,1]$.
אי-אפשר לעבור ישירות על סכומי רימן של פונקציה $f(t)$ בקטע $[0,1]$ מכיוון ש $f(t)$ לא חסומה בקטע $[0,1]$. במקום זה נתבונן מסכום דרבו עליון וסכום דרבו תחתון עבור פונקציה $f(t)$ בקטע $[\frac{1}{n},1]$.
משום שפונקציה $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ יורדת אזי

$$\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)}_{\text{סכום דרבו תחתון}}<\int_{1/n}^{1}f(t)\,dt<\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)}_{\text{סכום דרבו עליון}}$$

ההפרש בין סכום עליון וסכום תחתון שווה ל

$$\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-f(1)\right)=\frac{1}{n}\left(\sqrt{n}-1\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

לכן כאשר $n\to\infty$ אז שניהם שואפים לאותו גבול

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=C=\int_0^1 f(t)\,dt=2$$

שאלה 2

(א) אם טור של פונקציות רציפות מתכנס במידה שווה בתחום $\{x\neq 0\}$ אזי הוא גם יתכנס בנקודה $x=0$. אבל בנקודה $x=0$ מקבלים טור מספרי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{n}$.

$n\to\infty$, $\frac{1}{n}\sim\frac{e^{1/n}}{n}$. טור הרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר לכן גם טור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{n}$ מתבדר ולכן אין התכנסות במידה שווה ב $\{x\neq 0\}$.

(ב) נקבע $a>0$ כלשהו.

$$\forall n\ \forall |x|\ge a \qquad \frac{e^{1/n}}{n+n^2x^2} \le \frac{e}{n^2a^2} = \frac{e}{a^2}\,\frac{1}{n^2}$$

טור מספרי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס, לכן טור של פונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{n+n^2x^2}$ מתכנס במ׳ שווה בתחום $\{x:|x|\ge a\}$. לכן $S(x)$ מוגדרת ורציפה בתחום $\{x:|x|\ge a\}$ לכל $a>0$ כלשהו, לכן $S(x)$ מוגדרת ורציפה לכל $x\neq 0$.

<u>שאלה 3</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{((\Delta x)^2)^{\alpha}}{\Delta x\ln((\Delta x)^2)}$$

נסמן $(\Delta x)^2=t$. אזי $t\to 0$ ו $t>0$

$$=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{t^{\alpha}}{\sqrt{t}\,\ln t}=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{t^{\alpha-\frac12}}{\ln t}=0 \iff \alpha-\frac12\ge 0 \iff \alpha\ge\frac12$$

אם $\alpha<\frac12$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\infty$.

באופן דומה $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0 \iff \alpha\ge\frac12$

$$\Delta f = \varepsilon(\Delta x,\Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

לכן

$$\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=\frac{\left((\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right)^{\alpha-\frac12}}{\ln\left((\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right)}$$

נסמן $(\Delta x)^2+(\Delta y)^2=t$, $t\to 0$ ו $t>0$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{t^{\alpha-1/2}}{\ln(t)}=0 \iff \underbrace{\alpha\ge\frac12}$$

תשובה לשאלה.

<u>שאלה 4</u> קודם כל נמצא נקודות חשודות לאקסטרמום

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^{xy} f(t)dt\right) = f(xy)\cdot y$$

(מכיוון ש $\left(\int_0^{\varphi(x)} f(t)dt\right)' = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ על פי המשפט היסודי של חדו"א)

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^{xy} f(t)dt\right) = f(xy)\cdot x$$

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y=0\\ x=0\end{matrix}$$

(מפני ש $f(t)\neq 0$ לכל t)

עכשיו נבדוק תנאים מספיקים.
על פי כלל שרשרת

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f'(t)\cdot y^2$$

(כאשר $t=xy$)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f'(t)\cdot x^2 \;;\; \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x} = f(t)+f'(t)\cdot xy$$

$$A = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0)=0 \;;\; C = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0,0)=0 \;;\; B = \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(0,0)=f(0)$$

$\Delta = \det = -(f(0))^2 < 0$. $\begin{pmatrix}0 & f(0)\\ f(0) & 0\end{pmatrix}$ מרכזנו

לכן $(0,0)$ זו <u>לא אקסטרמום</u>, זו נקודת אוכף.

<u>שאלה 5</u> שאלה זהה לשאלה 5 במבחן 2016, מועד א' יש פתרון באתר של קורס. (רשום בדף הבא).

(א) נאשר פונקציה רציפה בתחום קומפקטי, לכן על פי משפט ויירשטרס נאשר חסומה בתחום, כלומר

$$\exists C>0 \quad \forall (x,y)\in D \quad |f(x,y)|\le C$$

$D\subset\mathbb{R}^2$ קבוצה חסומה, לכן יש ריבוע $T\subset\mathbb{R}^2$ כך ש $D\subset T$ ולכן גרף Γ_f מוכל בתוך תיבה

$$\Gamma_f \subset T\times[-C,C]$$

ז"א Γ_f קבוצה חסומה ב-$\mathbb{R}^3$. נוכיח כי Γ_f קבוצה סגורה. נניח כי $\{(x_n,y_n,z_n)\}_{n=1}^{\infty}\subset\Gamma_f$ סדרה שמתכנסת לנקודה $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$.

$(x_n,y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}(x_0,y_0)$, לכן $(x_0,y_0)\in D$ כי D קבוצה סגורה ב-$\mathbb{R}^2$. f פונקציה רציפה, לכן $z_n=f(x_n,y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0,y_0)$

כלומר $z_0=f(x_0,y_0) \iff (x_0,y_0,z_0)\in\Gamma_f$! Γ_f סגורה

(ב) תהי $(x_0,y_0)\in D$ נקודה כלשהי. עלינו להוכיח כי אם $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(x_0,y_0)$ ב-D אזי $\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)$ קיים ושווה לערך פונקציה $f(x_0,y_0)$.

נתון כי Γ_f הקבוצה קומפקטית, לכן היא קבוצה חסומה ומוכלת בתיבה מן הצורה $\Gamma_f\subset T\times[-C,C]$.

נתבונן בסדרה של ערכים $\{f(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}\subset[-C,C]$ לפי משפט בולצנו-ויירשטרס יש תת-סדרה שמתכנסת

$f(x_{n_k},y_{n_k})\xrightarrow[k\to\infty]{} L\in[-C,C]$. ח"ב להיות ש $L=f(x_0,y_0)$

נוסיף: $(x_{n_k},y_{n_k},f(x_{n_k},y_{n_k}))\in\Gamma_f$

$$(x_{n_k},y_{n_k},f(x_{n_k},y_{n_k}))\xrightarrow[k\to\infty]{}(x_0,y_0,L)$$

קבוצה Γ_f סגורה, לכן $(x_0,y_0,L)\in\Gamma_f$, לכן $L=f(x_0,y_0)$.

אם $f(x_{n_k},y_{n_k})\xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0,y_0)$ לכל תת-סדרה $(x_{n_k},y_{n_k})\xrightarrow[k\to\infty]{}(x_0,y_0)$ אזי גם $f(x_n,y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0,y_0)$, ז"א f רציפה ב-(x_0,y_0).