אוניברסיטת בן-גוריון בנגב | הפקולטה למדעי הטבע
Ben-Gurion University of the Negev | המחלקה למתמטיקה

בחינה בחשבון אינפיניטסימלי 2, תאריך 26.01.2018, מועד א'
מספר הקורס: 201-1-0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: ד"ר ארקדי ליידרמן

- משך הבחינה: 3 שעות
- יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. משקל של כל שאלות הוא 25 נקודות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- **אין להשתמש בחומר עזר פרט למחשבון פשוט ללא צג גרפי.**
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב **"לא יודע"** ולקבל 20% מהנקודות. הציון הסופי של שאלה יהיה מעוגל מעלה.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.

מספר הנבחן ____________________

שאלה 1

(25 נקודות) תארו את כל פונקציות מונוטוניות $f(x)$ בקטע $[0,1]$ שמקיימות את התכונה הבאה:

פונקציה $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ מקבלת ערך רציונלי לכל $x\in[0,1]$

שאלה 2 חקרו את התכנסות של האינטגרלים הלא אמתיים הבאים

(א) (15 נקודות) $\int_0^\infty \sin(x^\alpha+1)\,dx$ עבור $\alpha\ge 1$.

(ב) (10 נקודות) $\int_0^\infty \left(1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^\alpha+1}}\right)\right)dx$ עבור $\alpha\ge 1$.

שאלה 3 נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n+n^2x}=S(x)$.

(א) (10 נקודות) חקרו האם טור מתכנס במידה שווה בתחום $X=\{x:x>0\}$.

(ב) (15 נקודות) הוכיחו שפונקציה $S(x)$ מוגדרת ורציפה לכל $x>0$.

שאלה 4 (25 נקודות) נתון כי $|f(x,y)|\le\sqrt[5]{x^6+y^6}$ לכל (x,y).

הוכיחו כי פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בראשית.

שאלה 5 (25 נקודות) תהי $D\subset R^2$ קבוצה קומפקטית וקשירה מסילתית ותהי $f:D\to R$ פונקציה רציפה.

נגדיר תת-קבוצה של R^3 באופן הבא $G_f=\left\{(x,y,z)\in R^3:(x,y)\in D;\ f(x,y)\le z\le f(x,y)+x^2+y^2\right\}$.

הוכיחו כי קבוצה G_f קומפקטית וקשירה מסילתית.

בהצלחה!

26.01.2018

פתרון של מבחן באינפי 2 , 26.01.2018

<u>שאלה 1</u> על פי משפט שלמדנו בכתה, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ פונקציה רציפה לכל $f(x)$ אינטגרבילית בקטע.

$F(0)=0$. אם נניח כי קיימת נקודה $x_0\in[0,1]$ כך ש $F(x_0)\neq F(0)=0$ אזי על פי משפט "ערך הביניים" $F(x)$ הייתה מקבלת גם ערכים אי-רציונליים שהם בין $F(0)$ ו $F(x_0)$! לכן $F(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

מזה נובע כי $f(x)=0$ לכל $0<x<1$.

נניח בשלילה כי יש $x_0\in(0,1)$ כך ש $f(x_0)\neq 0$, למשל $f(x_0)>0$. אם $f(x)$ עולה אזי $f(x)\ge f(x_0)$ לכל $x_0\le x$ ואזי $F(1)=F(x_0)+\int_{x_0}^{1}f(t)dt>F(x_0)$ $\left(\int_{x_0}^{1}f(t)dt\ge f(x_0)(1-x_0)\right)$ ז"א $F(x)$ לא קבועה.

אם $f(x)$ יורדת אז $f(x)\ge f(x_0)$ לכל $x\le x_0$ ואזי $F(x_0)\ge f(x_0)\cdot x_0>0$, ז"א $F(x)$ לא קבועה.

ומכן $f(x)=0$ לכל $0<x<1$.

ערכים $f(0)$, $f(1)$ הם כלשהם:

או $f(0)\le 0\le f(1)$ כלשהם.
או $f(0)\ge 0\ge f(1)$ כלשהם. $\Leftarrow$ $F(x)=0$ לכל x.

שאלה 2 (א) נציב $x^\alpha+1=t$, $x^\alpha = t-1$

$x=(t-1)^{1/\alpha}$, $dx=\frac{1}{\alpha}(t-1)^{\frac{1}{\alpha}-1}dt$

$$\int_0^\infty \sin(x^\alpha+1)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_1^\infty \frac{\sin t}{(t-1)^{1-\frac{1}{\alpha}}}\,dt$$

אם $\alpha=1$ אזי האינטגרל $\int_1^\infty \sin t\,dt$ מתבדר.

אם $\alpha>1$ אזי האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sin t}{(t-1)^{1-\frac{1}{\alpha}}}\,dt$ מתכנס לפי מבחן דיריכלה:

ומונוטונית $\frac{1}{(t-1)^{1-\frac{1}{\alpha}}} \searrow 0$ כי $0<1-\frac{1}{\alpha}<1$

הוא לא מתכנס בהחלט:

$$\frac{|\sin t|}{t} \le \frac{|\sin t|}{(t-1)^{1-\frac{1}{\alpha}}}$$

ו האינטגרל $\int_1^\infty \frac{|\sin t|}{t}\,dt$ מתבדר. לכן גם $\int_1^\infty \frac{|\sin t|}{(t-1)^{1-\frac{1}{\alpha}}}\,dt$ מתבדר לפי מבחן ההשוואה.

(ב) $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$$\int_0^\infty \left(1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^\alpha+1}}\right)\right)dx = \int_0^\infty 2\sin^2\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^\alpha+1}}\right)dx$$

$\sin\alpha \sim \alpha,\ \alpha\to 0$

לכן, האינטגרל שקול ל: $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha+1}\,dx$

אם $\alpha=1$ האינטגרל מתבדר.

אם $\alpha>1$ האינטגרל מתכנס.

שאלה 3 אם נניח כי טור מתכנס במידה שווה בתחום
ב-$x>0$ אזי טור היה מתכנס גם בנקודה $x=0$.
ז"א טור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n}$ מתכנס. אבל למעשה שהוא
מתבדר.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n} = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{מתבדר — טור הרמוני}} - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}}_{\text{מתכנס לפי מבחן דיריכלה}}$$

(א) לכן טור לא מתכנס במידה שווה ב-$x>0$

(ב) נקבע $x_0>0$ כלשהו. יהי $0<a<x_0$ קבוע

$$\frac{\cos^2 n}{n+n^2x} \le \frac{\cos^2 n}{n+n^2 a} < \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{a} \quad \text{לכל } a\le x$$

טור מספרי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס, לכן
טור פונקציות מתכנס במידה שווה
על פי מבחן M של ויירשטרס בתחום $[a,\infty)$
ואז $S(x)$ מוגדרת ורציפה בתחום $[a,\infty)$.
x_0 שרירותי, לכן $S(x)$ רציפה לכל $x_0>0$.

שאלה 4 נתון כי $f(0,0)=0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$$

כי
$$0 \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \le \lim_{x\to 0} \frac{|f(x,0)|}{|x|} \le \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{\frac{6}{5}}}{|x|} = 0$$

באופן דומה $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y + \varepsilon\cdot\sqrt{x^2+y^2}$$

לכן
$$\varepsilon = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$|\varepsilon| \le \frac{\sqrt[5]{x^6+y^6}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$x^6+y^6 \le (x^2+y^2)^3$$

לכן $$|\varepsilon| \le \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{5}}}{(x^2+y^2)^{1/2}} = (x^2+y^2)^{\frac{1}{10}} \to 0$$

לכן גם $\varepsilon \to 0$ כאשר $x,y \to 0$. צ"ל $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$.

<u>שאלה 5</u> הקבוצה D חסומה, לכן יש עיגול עם רדיוס a כך ש- $D \subset B(0,a)$: $B(0,a) = \{(x,y) : x^2+y^2 \le a^2\}$.

$f(x,y)$ רציפה בתחום קומפקטי D, לכן על פי משפט ו"ר יש $M = \sup_{(x,y)\in D} |f(x,y)|$

אז G_f מוכלת בתוך צילינדר

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in B(0,a),\ -M \le z \le M+a^2\}$$

כלומר הקבוצה G_f חסומה ב- $\mathbb{R}^3$.

נוכיח כי הקבוצה G_f סגורה.

נניח $\{(x_n,y_n,z_n)\}_{n=1}^{\infty}\subset G_f$ סדרה שמתכנסת לנקודה (x_0,y_0,z_0). אז:

$$x_n\to x_0,\quad y_n\to y_0,\quad z_n\to z_0$$

D קומפקטית, לכן $(x_0,y_0)\in D$.

f רציפה, לכן $f(x_n,y_n)\to f(x_0,y_0)$.

$$f(x_n,y_n)\le z_n\le f(x_n,y_n)+x_n^2+y_n^2$$

לכן נעבור לגבול $n\to\infty$ ונקבל

$$f(x_0,y_0)\le z_0\le f(x_0,y_0)+x_0^2+y_0^2$$

ז״א

$$(x_0,y_0,z_0)\in G_f$$

נוכיח כי הקבוצה G_f קשירה מסילתית.

$P_1(x_1,y_1,z_1)$; $P_2(x_2,y_2,z_2)\in G_f$

נסמן מסילה רציפה γ שמחברת נקודות (x_1,y_1) ו־(x_2,y_2) בתוך D.

$P_1'(x_1,y_1,f(x_1,y_1))\in G_f$; $P_2'(x_2,y_2,f(x_2,y_2))\in G_f$

קיים $[P_1,P_1']\subset G_f$, וגם $[P_2,P_2']\subset G_f$.

$$[P_1,P_1']\cup\{(x,y,z):(x,y)\in\gamma,\ z=f(x,y)\}\cup[P_2,P_2']$$

זו מסילה רציפה שמחברת נקודות P_1,P_2 בתוך G_f.