

בחינה בחשבון אינפיניטסימלי 2, תאריך 18.07.2014, מועד א'  
מספר הקורס: 201-1-0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס  
המרצה: ד"ר ארקדי ליידרמן

- משך הבחינה: 3 שעות
- יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. משקל של כל שאלות הוא 25 נקודות. בשאלה 3 יש סעיף בוגוס נוסף.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- אין להשתמש בחומר עזר פרט למחשבון פשוט ללא צג גרפי.
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב "לא יודע" ולקבל 20% מהנקודות (פרט לסעיף בוגוס של שאלה 3).
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.

מספר הנבחן \_\_\_\_\_

### שאלה 1

$$\text{נתבונן במשוואה הבאה } (\#) \int_0^1 f(f(x) \cdot t) dt = \frac{1}{2} f(x) \text{ לכל } x.$$

- (א) (10 נקודות) מצאו את כל הפונקציות הלינאריות  $f(x) = Ax + B$  שמקיימות את המשוואה (#).
- (ב) (15 נקודות) נניח שפונקציה  $f(x)$  כלשהי מקיימת תכונות:
- (1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה "על"; (2)  $f(x)$  גזירה ו-  $f'(x) \neq 0$ ; (3)  $f(x)$  מקיימת את המשוואה (#).
- הוכיחו שיש פונקציה כזאת אחת בלבד:  $f(x) = x$ .

### שאלה 2

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

חשבו שטח של תחום מישורי שחסום על ידי שני קווים

$$-1 \leq x \leq 1 \quad (x \geq 1)$$

### שאלה 3

$$\text{יהי טור } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

- (א) (15 נקודות) הוכיחו שפונקציה  $S(x)$  מוגדרת ורציפה בתחום  $X = \{x : x > 1\}$ .
- (ב) (10 נקודות) הראו שטור לא מתכנס במידה שווה בתחום  $X = \{x : x > 1\}$ .
- (ג) (בוגוס - 10 נקודות) הוכיחו שפונקציה  $S(x)$  גזירה אינסוף פעמים בתחום  $X = \{x : x > 1\}$ .

**שאלה 4**

(א) (15 נקודות) נניח שפונקציה  $f(x, y)$  מקיימת את התכונה הבאה  $|f(x, y)| \leq \sqrt[3]{x^4 + y^4}$  לכל  $(x, y)$ .

הוכיחו כי  $f(x, y)$  דיפרנציאבילית בראשית.

(ב) (10 נקודות) הוכיחו כי פונקציה  $f(x, y) = \sqrt[4]{x^4 + y^4}$  לא דיפרנציאבילית בראשית.

**שאלה 5**

(א) (15 נקודות) מצאו את המינימום המקומי של הפונקציה  $f(x, y, z, u) = x^2 + y^2 + z^2 + u^2$

תחת האילוץ  $xyzu = 1$ .

(א) (10 נקודות) נגדיר תת-קבוצה של  $R^4$  באופן הבא

$$X = \{(x, y, z, u) \in R^4 : -1 \leq xyzu \leq 1; x^2 + y^2 + z^2 + u^2 > 2\}$$

הוכיחו כי קבוצה  $X$  קשירה מסילתית.

**רמז:** אפשר להיעזר בתוצאה של סעיף א'.

האם הקבוצה  $X$  קמורה?

**בהצלחה!**

1

18.07.2014 , 2 'כאן נרשם הפתרון

$f(x) = Ax + B$  (הצגין 2013) (מנסה לראות) (10) 100%

$f(f(x) \cdot t) = A(f(x) \cdot t) + B = A((Ax+B) \cdot t) + B$

$\int_0^1 f(f(x) \cdot t) dt = \int_0^1 [(A^2x + AB)t + B] dt =$

$= (A^2x + AB) \cdot \frac{1}{2} + B = \frac{1}{2}(Ax + B) = f(x)$

$\begin{cases} \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2}A \\ \frac{1}{2}AB + B = \frac{1}{2}B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=0 \Rightarrow B=0 \\ A=1 \Rightarrow B=0 \end{matrix}$  (10) 100%

$f(x) = x$  (10)  $f(x) = 0$  : נראה לה

הצגין נראה נכון (2)

$s = f(x) \cdot t \Rightarrow ds = f(x) \cdot dt$

הנחנו שהכל נכון (#) נראה ש

$\frac{1}{f(x)} \int_0^{f(x)} f(s) ds = \frac{1}{2} f(x)$

$\forall x \int_0^{f(x)} f(s) ds = \frac{1}{2} f^2(x)$  (10)

נראה שזה נכון

$\forall x f(f(x)) \cdot f'(x) = f(x) \cdot f'(x)$

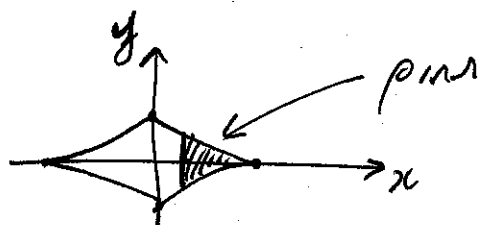
100%,  $f'(x) \neq 0$  ?

$\forall x \in \mathbb{R} f(f(x)) = f(x)$

100%, "88" כן  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  : 3, 10.  $f(x) = t$  (100%)  
שם 1, 100% 'ענן' 778  $f(x) = t$

$\forall t \in \mathbb{R} \exists \delta f(t) = t$

(2)



$$\cos^3 t = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \quad ; \quad 2\sqrt{2} \cos^3 t = 1 \quad \text{sic} \quad x=1 \quad \rho \cos t$$

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \pm \frac{\pi}{4}$$

→ for  $[0, 2\pi]$   $\rho \cos t$ ,  $\rho \sin t$ ,  $\rho$   $\rho \cos t$ ,  $\rho \sin t$

$[-\pi, \pi]$   $\rho \cos t$ ,  $\rho \sin t$

$\rho = 1 - x$   $\frac{1}{3}$   $\rho \cos t$   $\rho \sin t$

$$S = 2 \int_1^{2\sqrt{2}} y(x) dx = -2 \int_0^{\pi/4} \sqrt{2} \sin^3 t d(2\sqrt{2} \cos^3 t) =$$

$$= 24 \int_0^{\pi/4} \sin^3 t \cdot \cos^2 t \cdot \sin t dt =$$

$$= 24 \int_0^{\pi/4} \sin^4 t \cdot \cos^2 t dt$$

$$\sin^4 t \cdot \cos^2 t = \sin^2 t \cdot \frac{\sin^2 2t}{4} = \frac{(1 - \cos 2t)}{2} \frac{\sin^2 2t}{4}$$

$$\int = 3 \int_0^{\pi/4} \sin^2 2t dt - 3 \int_0^{\pi/4} \sin^2 2t \cdot \cos 2t dt$$

$$\int_0^{\pi/4} \sin^2 2t dt = \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_0^{\pi/4} \sin^2 2t \cos 2t dt = \frac{(\sin 2t)^3}{6} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{6}$$

$$S = \int = 3 \frac{\pi}{8} - 3 \frac{1}{6} = \boxed{\frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}}$$

צורת פונקציה ג' 3, אסוף 9

3

אסוף 3 (א) יוני  $x \in X$  כשלו. וקנה מסדר  $a$

כן?  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  אור פונקציה

מכנס המ'פני שווה בתחום  $[a, \infty)$   $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{na}$

ואר מסדר  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  מכנס מלוקל? אדא

עכנ סכום של אור  $S(x)$  פונקציה רציפה על  $[a, \infty)$  (המשל)  
 מתחום  $(a, \infty)$  ואנ רציפה בקופה סכ כשלי.  
 (ב) על  $[a, \infty)$  אור של פונקציה רציפה  
 מכנס המ'פני שווה בתחום  $X = \{x \mid x \geq a\}$  אונ' מיוון  
 גם יתנס בקציה  $x=1$  אב' ענו עא נכוני:  
 אר נולמנו מתגפר.

(2) יש עניאר המלס יצ'רה של אור פונקציה

א'הר-א'הר " כפ' ע'ע'יון ?  

$$x \in X \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^x}\right)' = S'(x)$$

צ'יון ע'ע'ר אור של נטרנ מכנס המ'פני שווה בתחום  $X$

$$\left(\frac{1}{n^x}\right)' = (n^{-x})' = -(n^{-x}) \cdot \ln n = -\frac{\ln n}{n^x}$$

אור פונקציה  $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$  מכנס המ'פני שווה בתחום  $(a, \infty)$  אדא על  $[a, \infty)$  אור ונ'מ'נ'  
 כנו הס'ב' א' אור מסדר  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^a}$

מכנס ע'ע'ר אדא - כפ' ע'ע'יון ע  $S(x)$  ע'ע'רה

א'ס-ס'ב' ע'ע'יון  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\ln n)^k}{n^x} = S^{(k)}(x)$   

$$x \in X \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^x}\right)^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\ln n)^k}{n^x} = S^{(k)}(x)$$

(4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ln n)^k}{n^a}$$

לכל  $a > 1$  ו- $k$  כלשהו

אנחנו רוצים להוכיח שהסדרה מתכנסת

אנחנו יודעים ש- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$  מתכנסת עבור  $a > 1$

נסתדע ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(ln n)^k}{n^a} = 0$

עבור  $n > n_0$  מתקיים  $\frac{(ln n)^k}{n^a} < \frac{1}{n^{a-\epsilon}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ln n)^k}{n^a}$$

לכן הסדרה מתכנסת לפי מבחן ההשוואה

אנחנו יודעים ש- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a-\epsilon}}$  מתכנסת עבור  $a-\epsilon > 1$



(5)

$$f(0,0) = 0$$

(2)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x^4} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

Handwritten notes in Hebrew: "הגבול לא קיים" (The limit does not exist), "כי" (because), "הערות" (notes), "הערות" (notes), "הערות" (notes).

Handwritten notes in Hebrew: "הערות" (notes), "הערות" (notes), "הערות" (notes), "הערות" (notes), "הערות" (notes).

$$L(x,y,z,u,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + \lambda(xyzu - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda yzu = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda xzu = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda xyu = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 2u + \lambda xyz = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = xyzu - 1 = 0$$

$$2x^2 + \lambda xyzu = 0$$

$$2y^2 + \lambda xyzu = 0$$

$$2z^2 + \lambda xyzu = 0$$

$$2u^2 + \lambda xyzu = 0$$

$$x^2 = y^2 = z^2 = u^2$$

$$xyzu = 1$$

$$(*) \quad x^2 = y^2 = z^2 = u^2 = 1$$

$$f(x,y,z,u) = 4$$

Handwritten notes in Hebrew: "הערות" (notes), "הערות" (notes), "הערות" (notes), "הערות" (notes), "הערות" (notes).



7) א"ן אופציה אחת ל  $\delta$  נקבעת אדוקטור מוסק  
 של  $f$  משתנה ממ"מ גמא  $1 = \gamma z u$  ו'אמצא  
 בחיך אופק סגור של מערכת משוואות  
 א"ן לוסק צורן בהע'קווי נוסבר .  
 (ג) נסמן  $S$  על יב'  $S$  סג'רה של נב'ר

$$S = \{ (x, y, z, u) : x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 3 \}$$

אם  $S$  ה' מוצאה של סג'ר א' סכס  $(x, y, z, u) \in S$

מקיים ?  $1 \leq \gamma z u \leq 1$  , כמ'ר  $S \subset X$

ניק' 2 נד'פ'ר כמ'ר  $M_1, M_2 \in X$

נסמן על  $M_i'$  נד'פ'ר חי'ר'ן של סג'רה  $S$

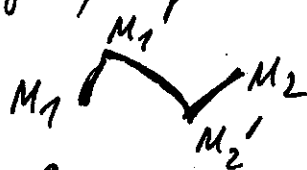
עם קרן  $[M_1, M_1']$  ש'וצא מראש' קרן נק'פה  $M_i$

קצ'  $[M_1, M_1']$  וקצ'  $[M_2, M_2']$  מונב'ים כמ'ר  
 קמ'צה  $X$  . זקס קר' של מ'ג'ם על

כ' סג'רה  $S$  שממ'ר נק'פה  $M_1', M_2'$   
 מונב'ר ממ'ן  $X$

ונכ'ן , מס'פה  $T$  שממ'ר נק'פה  $M_1, M_2$

כ'א אמי'ע של ש'ר' קצ'ים וק'ר אחר



קמ'צה  $X$  על  $\delta$  קמ'רה .  $\delta \neq 0$

$M_2(\frac{3}{4}, 4, 1, 1) \in X$  ,  $M_1(4, \frac{1}{4}, 1, 1) \in X$

אמצ'ע של קצ'  $[M_2, M_2']$  א' ע"ן קמ'צה  $X$