אוניברסיטת בן-גוריון בנגב | הפקולטה למדעי הטבע
Ben-Gurion University of the Negev | המחלקה למתמטיקה

בחינה בחשבון אינפיניטסימלי 2, תאריך 30.08.2013, מועד ב'
מספר הקורס: 201-1-0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: ד"ר ארקדי ליידרמן

- משך הבחינה: 3 שעות
- יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. משקל של כל שאלות הוא 25 נקודות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- **אין להשתמש בחומר עזר פרט למחשבון פשוט ללא צג גרפי.**
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב "**לא יודע**" ולקבל 20% מהנקודות. הציון הסופי של שאלה יהיה מעוגל מעלה.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.

מספר הנבחן________________

שאלה 1 (25 נקודות)
מצאו את כל הפונקציות $f(x)$ שמקיימות את התנאים הבאים

1) $f(x)$ רציפה לכל $x\in(-\infty,\infty)$ ו- $f(x)\neq 0$ לכל $x\neq 0$.

2) $\frac{[f(x)]^2}{2x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f(\frac{x}{n})+f(\frac{2x}{n})+f(\frac{3x}{n})+...+f(\frac{nx}{n})\right)$ לכל $x\neq 0$.

שאלה 2

א. (10 נקודות) נסמן $f(x,y,z)=x^2\varphi\left(\frac{yz}{x^2}\right)$, כאשר פונקציה $\varphi(t)$ גזירה ומקיימת $\varphi(t)\neq 0$ לכל t.

הראו כי ביטוי $\frac{1}{f(x,y,z)}(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z})$ שווה לערך קבוע. מהו ערך הקבוע?

ב. (15 נקודות) תהי פונקציה $f(x,y)$ רציפה בראשית. הוכיחו כי פונקציה $g(x,y)=xyf(x,y)$ דיפרנציאבילית בראשית.

שאלה 3

א. (10 נקודות) יהי טור מספרי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס. הוכיחו שטור פונקציות $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{1}{x^n}$ מתכנס במידה שווה בתחום $X=\{x:x\geq 1\}$. רמז: משפט Abel עבור טורי החזקות.

ב. (15 נקודות) נניח שטור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ מתכנס במידה שווה על כל הישר $(-\infty,\infty)$.
הראו שקיים n_0 כך ש- $b_n=0$ לכל $n>n_0$.

<u>שאלה 4</u>

נתונה הפונקציה $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{8}xy+\frac{1}{y}$ בתנאי ש- $x\neq 0, y\neq 0$.

א. (15 נקודות) מצאו את נקודות אקסטרמום המקומי של הפונקציה וקבעו את סוגיהן.

ב. (10 נקודות) מצאו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר של הפונקציה בתחום הבא
$D=\{(x,y): 0<x\leq 4, 0<y\leq 4, xy\geq 1\}$.

<u>שאלה 5</u> (25 נקודות) **4 הסעיפים בשאלה זו אינם קשורים אחד לשני!**

קבעו אלו מהטענות הבאות נכונות ונמקו את תשובותיכם (**נימוק באורך עד 5 שורות**).

א. (5 נקודות) נניח כי אינטגרל לא אמתי $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס. אז גם אינטגרל לא אמתי $\int_a^\infty [f(x)]^2 dx$ מתכנס.

ב. (5 נקודות) נניח כי טור החזקות $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ מתבדר לכל $\{x: |x|>1\}$. אז גם טור החזקות $\sum_{n=0}^\infty (a_n)^2 x^n$ מתבדר לכל $\{x: |x|>1\}$.

ג. (5 נקודות) נניח כי פונקציה $f(x): D\to \mathbb{R}$ מוגדרת ורציפה בתחום הגדרה $D\subset \mathbb{R}$.
אם גרף של פונקציה $\{(x,f(x)): x\in D\}\subset \mathbb{R}^2$ הוא קבוצה סגורה ב- $\mathbb{R}^2$ אז קבוצה D סגורה ב- $\mathbb{R}$.

ד. (10 נקודות) תהי קבוצה סופית של מספרים ממשיים $A=\{x_1,x_2,...,x_n\}$. קיימת פונקציה $f(x)$ שרציפה לכל x וגזירה אך ורק בנקודות מקבוצה A.

בהצלחה!

פתרון של מבחן 30.08.2013

<u>שאלה 1</u> יהי $x\neq 0$ כלשהו. אז $\frac{x}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x}{n}i\right)$

זו בעצם סכום רימן של פונקציה $f(t)$ בקטע $[0,x]$.

לכן משום שפונקציה $f(t)$ רציפה

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x}{n}i\right)=\int_0^x f(t)\,dt$$

מקבלים משוואה

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\frac{[f(x)]^2}{2x}\qquad \forall x\neq 0$$

$$\int_0^x f(t)\,dt=\frac{1}{2}[f(x)]^2\qquad (*)\qquad \forall x\neq 0$$

אגף שמאל הוא פונקציה גזירה, לכן גם פונקציה $[f(x)]^2$ פונקציה גזירה. <u>יש להוכיח</u> שאלה על סמך הנחה, ש $f(x)$ רציפה, גם $f(x)$ תהיה גזירה.

למת עזר זאת נוכיח בסוף. נגזור שוויון $(*)$ על פי המשפט היסודי של חדו"א

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}[f(x)]^2\right)'=f(x)\cdot f'(x)$$

$f(x)\neq 0$ על פי הנחה, לכן $f'(x)=1$ לכל $x\neq 0$.

אם נציב בשוויון $(*)$ $x=0$ אז נקבל $0=f(0)$.

לכן, התשובה היא: <u>$f(x)=x$</u> לכל x.

<u>למת עזר</u>. אם $f(x)\neq 0$ רציפה, ו $[f(x)]^2$ גזירה אז גם $f(x)$ גזירה.

הוכחה של אחת הטענות

תהי $x_0 \neq 0$. $f(x_0) \neq 0$ ו $f(x)$ רציפה, לכן יש סביבה של x_0 כך ש $f(x) \neq 0$ לכל x בסביבה זאת.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^2(x)-f^2(x_0)}{x-x_0} \frac{1}{f(x)+f(x_0)}$$

$$= \frac{1}{2f(x_0)} \cdot \left(f^2(x)\right)'_{x=x_0}$$

<u>שאלה 2</u> (א). מותר להשתמש בכלל שרשרת.

$$t = \frac{yz}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot \varphi(t) + x^2 \cdot \varphi'(t) \cdot \left(-\frac{2yz}{x^3}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cdot \varphi'(t) \frac{z}{x^2} \;;\quad \frac{\partial f}{\partial z} = x^2 \varphi'(t) \frac{y}{x^2}$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = 2x^2 \varphi(t) - 2\varphi'(t)\, yz$$
$$+ \varphi'(t)\, yz + \varphi'(t)\, yz = 2x^2 \varphi(t)$$

לכן $\frac{1}{f}\left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}\right) = 2$

(ב) $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{g(x,y)-g(0,0)}{y} = 0 \;;\; \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x,0)-g(0,0)}{x} = 0$

$$g(x,y) = 0 \cdot x + 0 \cdot y + \varepsilon \cdot \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varepsilon = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y)$$

כי $2|xy| \le x^2+y^2$, לכן $|\varepsilon| \le \frac{1}{2}\sqrt{|xy|}\,|f(x,y)|$ ולכן $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \varepsilon = 0$

לכן f דיפרנציאבילית בראשית.

שאלה מס' 3 (א) נסמן $t=\frac{1}{x}$.

$x \geq 1 \Rightarrow 0 < t \leq 1$

אז הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ מתכנס בנקודה $t=1$ על פי הנתון. לכן לפי משפט Abel אז הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ מתכנס במידה שווה בקטע $[0,1]$, ולכן אז הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{x^n}$ מתכנס במידה שווה ב- $[1,\infty)$

(ב) נרשום קריטריון קושי עבור התכנסות במידה שווה בתחום $(-\infty,\infty)$:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_0 \quad \forall n>n_0 \quad \forall p\in \mathbb{N} \quad \forall x\in(-\infty,\infty)$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k x^k\right| < \varepsilon$$

בפרט נקבל (ε ספציפי, למשל) $\varepsilon=1$ וגם $p=1$ אזי

$$\exists n_0 \quad \forall n>n_0 \quad \forall x\in(-\infty,\infty)$$

$$|b_n x^n| < 1$$

אבל $\lim_{x\to\infty} x^k = \infty$. לכן אי-שוויון הזה מתקיים לכל x רק במקרה ש- $b_n=0$.

ומכאן $b_n=0 \quad \forall n>n_0 \quad \exists n_0$. מ.ש.ל.

(א) <u>שאלה 4</u>

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{y}{8} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{8} - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} = \frac{x^4}{8^2} = \frac{x}{8} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^4 - 8x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2$$

$x=0$ לא שייכת לתחום הנתון..

$x = 2 \Rightarrow y = 2$

בדיקה של תנאי מספיק:

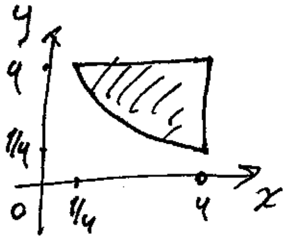
$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3};\quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3}$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{8}$$

בנקודה $M(2,2)$ מקבלים

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \Rightarrow M$$ היא נקודה של מינימום מקומי

(ב) נחקור על השפה של התחום



(I) $x = 4,\ y \in [\frac{1}{4}, 4]$ $\quad g(y) = f(4, y) = \frac{1}{y} + \frac{y}{2} + \frac{1}{2}$

$$g'(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{y^2} = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

$$g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \frac{1}{4} \approx 1.66$$

בקצוות $g(1) = 4\frac{3}{8},\ g(4) = 2\frac{1}{2}$

(II) $y = 4,\ x \in [\frac{1}{4}, 4]$ בדומה

(III) $y = \frac{1}{x},\ x \in [\frac{1}{4}, 4]$

$$\varphi(x) = f(x, \tfrac{1}{x}) = \frac{1}{x} + \frac{1}{8} + x$$

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

רק $x=1$ שייכת לתחום.

$$\varphi(1) = 2\tfrac{1}{8}\ ;\ \varphi(4) = \varphi\left(\tfrac{1}{4}\right) = 4\tfrac{3}{8}$$

$$f(2,2) = \frac{3}{2}$$

סה״כ:

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = f\left(4,\tfrac{1}{4}\right) = f\left(\tfrac{1}{4},4\right) = 4\tfrac{3}{8}$$

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = f(2,2) = \frac{3}{2}$$

שאלה 5

(א) לא נכון. $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $x>0$. אזי $\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ מתכנס על פי מבחן דירכלה, אבל $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx$ מתבדר.

(ב) נכון: רדיוס התכנסות עבור טור $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$.

$$R_1=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}\le 1$$

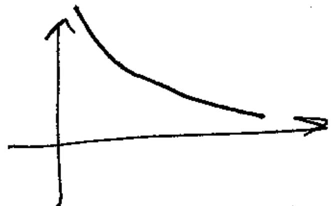
אזי גם עבור טור $\sum_{n=0}^\infty (a_n)^2 x^n$

$$R_2=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{(a_n)^2}}=(R_1)^2\le 1$$

(ג) לא נכון.

$f(x):(0,\infty)\to\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{1}{x}$



גר f סגור, אבל $D=(0,\infty)$ לא סגור.

(ד) נסמן $w(x)$ פונקציית דירכלה ש רציפה, ולכל x ולא גזירה באף x.

נגדיר $f(x)=(x-x_1)\dots(x-x_n)w(x)$ (מכפלה)

$$f'(x_i)=\lim_{x\to x_i}\frac{f(x)-f(x_i)}{x-x_i}=(x-x_1)\dots(x-x_n)w(x_i)$$
(אין $x=x_i$ במכפלה)

$f(x)$ לא גזירה באף נקודה x^* שאינה x_i
כי $w(x)=\frac{f(x)}{(x-x_1)\dots(x-x_n)}$,
אם היתה $f(x)$ גזירה ב $x^*\neq x_i$ אזי, גם $w(x)$
לא נכון.