אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev
הפקולטה למדעי הטבע
המחלקה למתמטיקה

בחינה בחשבון אינפיניטסימלי 2 , תאריך 09.01.2013, מועד א'
מספר הקורס: 201-1-0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: ד"ר ארקדי ליידרמן

- משך הבחינה: 3 שעות
- יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. משקל של כל שאלה 25 נקודות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- **אין להשתמש בחומר עזר פרט למחשבון פשוט ללא צג גרפי.**
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב **"לא יודע"** ולקבל חמישית מהנקודות. הציון הסופי של שאלה יהיה מעוגל מעלה.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.

מספר הנבחן ____________

שאלה 1

(25 נק') תהי פונקציה $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$. הוכיחו שקיימת נקודה $c\in[0,1]$

כך שמתקיים $\int_{\sqrt{c}}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{c^2} f(x)\,dx$.

שאלה 2

נתבונן בקשת של קרדיאוידה $K=\{r=a(1+\cos\varphi):\varphi\in[0,\pi]\}$, כאשר $a>0$ קבוע.

א. (15 נק') מצאו ערך זווית φ_0 כך שקרן $\varphi=\varphi_0$ מחלקת קשת K לשני חלקים עם אותו אורך.

ב. (10 נק') מצאו שטח של גזרה שחסומה על ידי הקשת K ושני ישרים $\varphi=0$ ו- $\varphi=\varphi_0$,

כאשר φ_0 נקבע בסעיף א'.

שאלה 3.

(25 נק') תהי פונקציה $f(x):[0,1]\to[0,1]$ רציפה ומקיימת תכונות $f(0)=0; f(1)=1$.

נסמן $f_n(x)=[f(x)]^n$ לכל $n\in N$. הוכיחו כי קיים גבול $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ לכל $x\in[0,1]$

אבל התכנסות של סדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ בקטע $[0,1]$ היא **לא** במידה שווה.

שאלה 4

נתונה הפונקציה $f(x,y)=4x^2+9y^2-(2x^2+3y^2)^2$.

א. (15 נק') מצאו את הנקודות אקסטרמום המקומי של הפונקציה וקבעו את סוגיהן.

ב. (10 נק') מצאו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר של הפונקציה בתחום הבא $D=\{(x,y):2x^2+3y^2\le 1\}$.

שאלה 5 (25 נקודות) **4 הסעיפים בשאלה זו אינם קשורים אחד לשני!**

הוכיחו או הפריכו (באמצעות דוגמה נגדית) את הטענות הבאות:

א. (6 נק') אינטגרל לא אמתי $\int_0^\infty \frac{\sin x}{(\ln(x+1))^\alpha}dx$ מתכנס בתנאי כאשר $0<\alpha<2$.

ב. (6 נק') יהי טור מספרי (לא בהכרח חיובי) $\sum_{n=0}^\infty a_n$ מתכנס. אז טור חזקות $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ מתכנס בהחלט לכל $|x|<1$.

ג. (6 נק') אם טור $\sum_{n=0}^\infty p_n(x)$ מתכנס במידה שווה בקטע $[-1,1]$, כאשר כל $p_n(x)$ הוא פולינום, אז טור של נגזרות $\sum_{n=0}^\infty p_n'(x)$ גם מתכנס במידה שווה בקטע $(-1,1)$.

ד. (7 נק') תהי פונקציה $f(x,y):R^2\to R$ רציפה ובעלת נגזרות חלקיות $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ בכל נקודה (x,y). נגדיר פונקציה מורכבת $g(t)=f(t,t)$.

אז $g(t)$ גזירה בנקודה $t=0$ ו- $g'(0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

בהצלחה!

09.01.2013 פתרון של מבחן

שאלה 1 נסמן $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ לכל $x\in[0,1]$.

אזי $F(x)$ רציפה, $F(0)=0$.

$$F(c^2)=\int_0^{c^2} f(t)dt$$

$$F(\sqrt{c}) = F(1)-\int_{\sqrt{c}}^1 f(t)dt$$

לכן

$$\int_0^{c^2} f(t)dt-\int_{\sqrt{c}}^1 f(t)dt = F(c^2)+F(\sqrt{c})-F(1)$$

פונקציה רציפה של משתנה $c\in[0,1]$.

נסמן

$$g(c)=F(c^2)+F(\sqrt{c})-F(1)$$

$$g(0)=-F(1)$$

$$g(1)=F(1)$$

ובכן, פונקציה רציפה $g(c)$ מוגדרת $[0,1]$ ומקבלת בקצוות של קטע ערכים מנוגדים. על פי משפט על ערך הביניים של פונקציה רציפה קיים $c\in[0,1]$ כך ש- $g(c)=0$, כלומר

$$\int_0^{c^2} f(t)dt = \int_{\sqrt{c}}^1 f(t)dt$$

שאלה 2 (א)

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi$$

$$r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2 = a^2\left((1+\cos\varphi)^2+(-\sin\varphi)^2\right) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

אורך של קטע K שווה

$$L=\int_0^\pi 2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 4a$$

אם $\int_0^{\varphi_0} 2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4a\cdot\sin\frac{\varphi_0}{2} = \frac{L}{2} = 2a$

אז $\sin\frac{\varphi_0}{2} = \frac{1}{2}$

כלומר $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$

(ב) $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi =$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/3}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{\sin2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{9}{8}\sqrt{3}\right)$$

<u>שאלה 3</u> אם $0 \le f(x) < 1$ אז $\lim_{n\to\infty}[f(x)]^n = 0$

לכן $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ היא פונקציה

שמקבלת רק שני ערכים: או 0, או 1.

$f(0)=0$, לכן $g(0)=0$. $f(1)=1$, לכן, $1=g(1)$.

נניח בשלילה שסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת

במידה שווה לפונקציה $g(x)$ בקטע $[0,1]$.

$f_n(x)$ פונקציה רציפה לכל n, לכן גבול של

סדרה $g(x)$ גם תהיה פונקציה רציפה ב $[0,1]$:

$g(0)=0$, $g(1)=1$ ואז על פי משפט

״ערך הביניים״ פונקציה $g(x)$ חייבת גם לקבל

כל ערך בין 0 ו 1. אבל $g(x)$ מקבלת רק

שני ערכים: 0 ו 1. סתירה מוכיחה טענה.

שאלה 4

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 16x^3 - 24xy^2 = 8x\left(1 - (2x^2 + 3y^2)\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 18y - 24x^2y - 36y^3 = 6y\left(3 - 2(2x^2 + 3y^2)\right) = 0$$

נקודות חשודות לאקסטרמום הן:

$$(0,0)\ ,\ \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ ,\ \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$f''_{xx} = 8 - 48x^2 - 24y^2 = A$$

$$f''_{yy} = 18 - 24x^2 - 108y^2 = C$$

$$f''_{xy} = -48xy = B$$

$$\Delta = f''_{xx} f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 = AC - B^2$$

$(0,0)$: $f''_{xx} > 0,\ \Delta > 0 \Rightarrow$ נקודת מינימום מקומי

$\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $f''_{xx} < 0,\ \Delta > 0 \Rightarrow$ נקודת מקסימום מקומי

$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$: $\Delta<0 \Rightarrow$ נקודת אוכף

(ב) נקח את הפרמטריזציה הנוחה של $2x^2+3y^2=1$:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t \end{cases} \qquad 0\le t\le 2\pi$$

$$g(t)=f(x(t),y(t))=2\cos^2 t+3\sin^2 t-1=$$
$$=1+\sin^2 t=1+\frac{1-\cos 2t}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t$$

$$\frac{dg}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t\right)=\sin 2t=0$$
$$t=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$$

$t=0$: $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=0$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=g(0)=1$

$t=\frac{\pi}{2}$: $x=0$, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $f\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$

$t=\pi$: $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=0$, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=g(\pi)=1$

$t=\frac{3\pi}{2}$: $x=0$, $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $f\left(0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2$

נקודות קריטיות פנימיות שמצאנו בתוך התחום:

$(0,0)$: $f(0,0)=0$

לכן

$\min f=\min(0,1,2)=0$, $\max f=\max(0,1,2)=2$

שאלה מס' 5 (א)

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{(\ln(x+1))^\alpha}dx \sim \int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}dx \sim \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$$

ולכן מתכנס $\iff \alpha<2$.

$\int_1^\infty \frac{\sin x}{(\ln(x+1))^\alpha}dx$ מתכנס על פי מבחן דיריכלה לכל α.

אם $\alpha>0$ אז האינטגרל הזה לא מתכנס בהחלט כי לכל α $\frac{|\sin x|}{x} \le \frac{|\sin x|}{(\ln(x+1))^\alpha}$ החל מ מקום מסוים

האינטגרל $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$ מתבדר ולכן גם $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{(\ln(x+1))^\alpha}dx$ מתבדר. ~~ולכן~~ תשובה נכונה: האינטגרל מתכנס עבור $0<\alpha<2$ בתנאי.

(ב) נתון שטור חזקות $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ מתכנס עבור $x=1$. אזי על פי משפט אבל טור חזקות מתכנס בהחלט לכל $|x|<1$. תשובה נכונה.

(ג) תשובה לא נכונה. טור חזקות $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2}$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה רק על $[-1,1]$, אבל טור של נגזרות $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n-1}}{n}$ כן מתכנס בתחום $[-1,1)$ אבל לא במידה שווה, כי טור לא מתכנס בנקודה $x=1$.

ד) טענה לא נכונה כי לא נתון שפונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית!

דוגמא: $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^2}$ אם $(x,y)\neq(0,0)$ ו-$f(0,0)=0$!

אז $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ קיימות לכל $(x,y)\neq(0,0)$

וגם $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ על פי הגדרה של נגזרת.

$g(t)=f(t,t)=\frac{t}{2}$, לכן

$g'(t)=\frac{1}{2}$ לכל t, כאשר $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.