הפקולטה למדעי הטבע
המחלקה למתמטיקה
אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

בחינה בחשבון אינפיניטסימלי 2, תאריך 17.07.2013, מועד א'
מספר הקורס: 201-1-0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: ד"ר ארקדי ליידרמן

- משך הבחינה: 3 שעות
- יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. משקל של כל שאלות הוא 25 נקודות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- **אין להשתמש בחומר עזר פרט למחשבון פשוט ללא צג גרפי.**
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב **"לא יודע"** ולקבל 20% מהנקודות. הציון הסופי של שאלה יהיה מעוגל מעלה.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.

מספר הנבחן ________________

שאלה 1

(א) (10 נקודות) מצאו את כל פונקציות רציפות $f(x)$ שמקיימות את התכונה הבאה:

$\int_0^1 f(xt)\,dt = f(x)$ לכל קבוע x.

(ב) (15 נקודות) מצאו את כל פונקציות רציפות $f(x)$ שמקיימות את התכונות הבאות: $f(x)>0$ לכל $x\neq 0$

ו- $\int_0^1 f(xt)\,dt = \frac{1}{2013} f(x)$ לכל קבוע x.

שאלה 2

(א) (10 נקודות) נניח שפונקציה $\varphi(\alpha)$ רציפה לכל α ועקומה $C=\{(x(t),y(t)) : 0\le t\le 2\}$ מוגדרת על ידי הצגה

פרמטרית הבאה: $\{x(t)=\int_0^{t^2} \sin(\varphi(\alpha))\,d\alpha,\quad y(t)=\int_0^{t^2} \cos(\varphi(\alpha))\,d\alpha\}$. מצאו את אז האורך של העקומה C.

(ב) (15 נקודות) הוכיחו כי פונקציה $f(x,y)=\sqrt[4]{|x^5+y^5|}$ דיפרנציאבילית בראשית.

שאלה 3

יהי טור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^x}=S(x)$.

(א) (15 נקודות) הוכיחו שפונקציה $S(x)$ מוגדרת ורציפה לכל $x>0$.

(ב) (10 נקודות) הראו שטור <u>לא</u> מתכנס במידה שווה בתחום $X=\{x : x>0\}$.

שאלה 4 (25 נקודות)

תהי $D \subset R^3$ קבוצה קומפקטית וקשירה מסילתית ותהי $f : D \to R$ פונקציה רציפה.

נגדיר תת-קבוצה של R^4 באופן הבא

$$G_f = \left\{(x,y,z,u) \in R^4 : (x,y,z) \in D; f(x,y,z) - 1 \le u \le f(x,y,z) + 1\right\}$$

הוכיחו כי קבוצה G_f קומפקטית וקשירה מסילתית.

שאלה 5 (30 נקודות) **4 הסעיפים בשאלה זו אינם קשורים אחד לשני!**

קבעו אלו מהטענות הבאות נכונות ונמקו את תשובותיכם (**נימוק באורך עד 5 שורות**).

א. (5 נקודות) אם $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(\xi_i) = C < \infty$ כאשר נקודות $\xi_i \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ **רציונאליות** כלשהן.

אז פונקציה $f(x)$ אינטגרבילית ו- $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = C$.

ב. (5 נקודות) נניח כי שני טורי החזקות מקיימות $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n+1} x^n = f(x); \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = g(x)$.

נניח עוד כי $f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0)$ לכל $k = 1,2,3,...$. אזי $f'(1) = g'(1)$.

ג. (5 נקודות) תהי פונקציה $f(x,y) : R^2 \to R$ בעלת נגזרות חלקיות מסדר שני רציפות במישור R^2 ומקיימת את התכונה :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} < 0$ בכל נקודה . אז לפונקציה $f(x,y)$ אין נקודות מינימום מקומי.

ד. (10 נקודות) לא קיימת פונקציה $f(x)$ שרציפה לכל x וגזירה בנקודה אחת __בדיוק__.

בהצלחה!

17.07.2013

פתרון של מבחן אינפי 2, 17.07.2013

<u>שאלה 1</u> נקבע $x\neq 0$ כלשהו.

$$\int_0^1 f(xt)\,dt = \left\{\begin{array}{l}\text{הצבה}\\ xt=s \\ dt=\frac{ds}{x}\end{array}\right\} = \frac{1}{x}\int_0^x f(s)\,ds$$

(א)
$$\frac{1}{x}\int_0^x f(s)\,ds = f(x) \Rightarrow \int_0^x f(s)\,ds = x\cdot f(x)$$

ניתן לגזור משני הצדדים של שוויון זה,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(s)\,ds\right) = \left(x f(x)\right)'$$

לכן
$$f(x) = f(x) + x f'(x)$$

כלומר
$$x f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x)=0$$

התשובה, $\boxed{f(x)=Const}$ כאשר Const שרירותי.

(ב)
$$\forall x\neq 0 \qquad \int_0^x f(s)\,ds = \frac{1}{2013}\,x f(x)$$

ניתן לגזור

$$f(x) = \frac{1}{2013}f(x) + \frac{1}{2013}x f'(x)$$

לכן
$$2012\cdot f(x) = x f'(x),$$

$$\frac{2012}{x} = \frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln f(x)]'$$

(כאשר $f(x)>0$ ולכן $\ln f(x)$ מוגדר היטב.

$$\ln f(x) = \int \frac{2012}{x}\,dx = \ln\left(x^{2012}\right) + \ln C$$

לכן
$$\boxed{f(x) = C\cdot x^{2012}}$$
כאשר C קבוע שרירותי.

<u>שאלה 2</u> (א) אורך עקומה C שווה ל:

$$\int_0^2 \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt =$$

$$\int_0^2 \sqrt{\left([\sin\varphi(t^2)]^2+[\cos\varphi(t^2)]^2\right)\cdot(2t)^2}\,dt =$$

$$= \int_0^2 2t\,dt = t^2\Big|_0^2 = 4$$

(ב) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{|x|^{\frac{5}{4}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to0}|x|^{\frac{1}{4}}\frac{|x|}{x} = 0$$

כי $\frac{|x|}{x}$ חסום על ידי 1, $|x|^{\frac{1}{4}}\to0$.

באופן סימטרי גם $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

נרשום תוספת שלמה:

$$\Delta f = f(x,y)-f(0,0) = 0\cdot x+0\cdot y+\varepsilon\cdot\sqrt{x^2+y^2}$$

לכן

$$\varepsilon(x,y) = \frac{\sqrt[4]{|x^5+y^5|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt[4]{\frac{|x^5+y^5|}{(x^2+y^2)^2}}$$

$$0 \le \frac{|x^5+y^5|}{(x^2+y^2)^2} \le \frac{|x|\,x^4}{(x^2+y^2)^2}+\frac{|y|\,y^4}{(x^2+y^2)^2} \le |x|+|y|$$

לכן על פי "סנדוויץ'"

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{|x^5+y^5|}{(x^2+y^2)^2}=0$$

ולכן גם $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\varepsilon=0$, כלומר ה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בראשית.

שאלה 3

(א) לכל $x>0$ טור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^x}$ מקיים תנאים
של מבחן לייבניץ ולכן סכום שלו $S(x)$
פונקציה מוגדרת לכל $x>0$.
כדי להוכיח רציפות של פונקציה $S(x)$
צריך להוכיח התכנסות במידה שווה
בכל תחום $[a,\infty)$, כאשר $a>0$ שרירותי.
נקבע $a>0$. אזי על פי תכונות של טור
שמקיים תנאים של מבחן לייבניץ

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^x}\right| \le \frac{1}{n^x} \le \frac{1}{n^a} \quad \forall x\ge a$$

(שארית בטור קטנה מאיבר ראשון של שארית)
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0$ וזה בדיוק אומר שטור
של פונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^x}$ מתכנס במידה
שווה בתחום $[a,\infty)$. לכן על פי משפט
סכום של טור $S(x)$ היא פונקציה רציפה
ב $[a,\infty)$ ולכן לכל $x>0$ פונקציה $S(x)$ רציפה.

(ב) לפי המשפט אם טור של פונקציות
רציפות מתכנס במידה שווה בתחום
אזי הוא גם מתכנס בנקודות קצה של תחום.
אבל טור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^x}$ <u>לא</u> מתכנס
עבור $x=0$. לכן טור <u>לא</u> מתכנס במידה
שווה בתחום $\{x:x>0\}=X$.

<u>שאלה 4</u> צריך להוכיח שהקבוצה G_f היא
חסומה, סגורה וקשירה מסילתית.

על פי משפט ויירשטראס יש מינימום ומקסימום

$$m = \min_{p \in D} f(p)$$

$$M = \max_{P \in D} f(P)$$

D קבוצה חסומה ב $\mathbb{R}^3$, לכן

$$G_f \subset D \times [m-1, M+1]$$

גם הקבוצה <u>חסומה</u> ב $\mathbb{R}^4$.

נוכיח שהקבוצה G_f סגורה.

נניח $P_n(x_n, y_n, z_n, u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0(x_0, y_0, z_0, u_0)$

אז

$$(x_n, y_n, z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x_0, y_0, z_0)$$

$\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset D$, D קבוצה סגורה, לכן
גם $(x_0, y_0, z_0) \in D$.

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u_0$$

$$f(x_n, y_n, z_n) - 1 \le f(u_n) \le f(x_n, y_n, z_n) + 1$$

f פונ' רציפה, לכן גם יש מעבר
לגבול אי שוויון!

$$f(x_0, y_0, z_0) - 1 \le u_0 \le f(x_0, y_0, z_0) + 1$$

ז"א $P_0(x_0, y_0, z_0, u_0) \in G_f$.

נוכיח שקבוצה G_f קשירה מסילתית:

ניקח שתי נקודות

$P_0(x_0, y_0, z_0, u_0) \in G_f$

$P_1(x_1, y_1, z_1, u_1) \in G_f$.

אז

$P_0'(x_0, y_0, z_0) \in D$

$P_1'(x_1, y_1, z_1) \in D$

קבוצה D קשירה מסילתית, נסמן מסילה שמחברת P_0', P_1' מתוך D $\{\gamma(t) : t \in [0,1]\}$!

$$\gamma(t) = \{(x(t), y(t), z(t)) : t \in [0,1]\}$$

מסילה שמחברת נקודות P_0, P_1 מתוך G_f תהיה מחוברת מ- 3 חלקים:

קטע ישר שמחבר P_0 ונקודה

$P_0^*(x_0, y_0, z_0, f(x_0, y_0, z_0))$

קטע ישר שמחבר P_1 ונקודה

$P_1^*(x_1, y_1, z_1, f(x_1, y_1, z_1))$.

ועוד מסילה שמחברת נקודות P_0^*, P_1^* על פני גרף של פונקציה f:

$$\gamma^*(t) = \{(x(t), y(t), z(t), f(x(t), y(t), z(t))) : t \in [0,1]\}$$

$[P_0, P_0^*] \cup \gamma^*(t) \cup [P_1^*, P_1] \subset G_f$.

שאלה 5

(א) טענה לא נכונה. דוגמא נגד פונקציית דיריכלה

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{אם } x \text{ אי-רציונלי}\\ 1, & \text{אם } x \text{ רציונלי}.\end{cases}$$

אז $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(\xi_i)=1$ לכל ξ_i רציונליים

אבל $f(x)$ לא אינטגרבילית.

(ב) טענה נכונה. אם $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=f(x)$

אז $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ לכל n. לכן אם $f^{(k)}(0)=g^{(k)}(0)$

לכל $k=1,2,\dots$ אז $b_n=\frac{n^2}{2^n+1}$ לכל $n=1,2,\dots$

כלומר $g(x)=f(x)+b_0$ לכל x מתחום

ההתכנסות של טור. $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}+1}:\frac{n^2}{2^n+1}=\frac{1}{2}$

לכן $R=2$, $g(x)=f(x)+b_0$ לכל $-2<x<2$

מכאן $g'(x)=f'(x)$ לכל $-2<x<2$.

(ג) טענה נכונה. נניח (x_0,y_0) היא נקודה של מינימום מקומי! אז $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0$, $0<\Delta=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2$, כלומר

גם $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)>0$. זה סותר אי-שוויון הנתון.

(ד) טענה לא נכונה. נסמן על ידי $g(x)$ פונקציית ווירשטרס שרציפה בכל x ולא גזירה

בשום x. נגדיר $f(x)=x\cdot g(x)$. רציפה כמו $g(x)$.

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{xg(x)}{x}=g(0)$ מוגדרת. אם $f(x)$ גזירה

בכל $x\neq 0$ אז גם $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ גזירה ב x. לא נכון.