אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev
הפקולטה למדעי הטבע
המחלקה למתמטיקה

בחינה בחשבון אינפיניטסימלי 2 , תאריך 26.08.2012, מועד ב'
מספר הקורס: 201-1-0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: ד"ר ארקדי ליידרמן

- משך הבחינה: 3 שעות
- יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. משקל של כל שאלה 25 נקודות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- **אין להשתמש בחומר עזר פרט למחשבון פשוט ללא צג גרפי.**
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב "**לא יודע**" ולקבל חמישית מהנקודות. הציון הסופי של כל שאלה יעוגל כלפי מעלה.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.

מספר הנבחן ________________

שאלה 1

א. (15 נק') חשבו $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{3/2}}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n})$.

ב. (10 נק') תהי פונקציה $f(x):[a,b]\to[a,b]$ גזירה, יורדת ממש ו"על".

נסמן $g(t)=f^{-1}(t):[a,b]\to[a,b]$ פונקציה הופכית. הוכיחו כי $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^b g(t)\,dt$.

שאלה 2

(25 נק') נניח כי 2 סדרות של פונקציות מתכנסות במידה שווה על R:

$f_n(x)\to f(x);\ g_n(x)\to g(x)$. נניח בנוסף שפונקציות גבוליות $f(x);\ g(x)$ שתיהן חסומות.

הוכיחו כי $f_n(x)g_n(x)\to f(x)g(x)$ במידה שווה על R.

שאלה 3

עבור פונקציה $f:[a,b]^2\to[0,\infty)$ נסמן קבוצה $D_f\subset R^3$ אשר ממוקמת מתחת לגרף של פונקציה f:

$$D_f=\{(x,y,z)\in R^3:(x,y)\in[a,b]^2, 0\le z\le f(x,y)\}$$

א. (20 נק') הראו כי אם פונקציה f רציפה בכל נקודה אז הקבוצה D_f קומפקטית וקשירה מסילתית.

ב. (5 נק') נניח כי הפונקציה f רציפה בכל נקודה פרט לנקודה אחת.

האם הקבוצה D_f עדיין קשירה מסילתית? האם הקבוצה D_f יכולה להיות קומפקטית? נמקו.

שאלה 4

א. (15 נק') נניח כי פונקציה $f(x,y)$ מקיימת את התכונה הבאה $|f(x,y)| \le |xy|$ לכל (x,y).
הוכיחו כי הפונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

ב. (10 נק') תהי נתונה פונקציה $g(x,y)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin(\frac{y}{x})+y^{\alpha}\sin(\frac{x}{y}); & x>0, y>0 \\ 0; & else \end{cases}$.

מצאו את כל הערכים α כך שפונקציה $g(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

שאלה 5 (25 נקודות) **4 הסעיפים בשאלה זו אינם קשורים אחד לשני!**

קבעו אלו מהטענות הבאות נכונות ונמקו את תשובותיכם.

א. (6 נק') אינטגרל לא אמתי $\int_0^{\infty}\cos(\frac{1}{x})x^{\alpha}\,dx$ מתכנס אם ורק אם $-2<\alpha<0$.

ב. (6 נק') נניח כי טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ מתכנס לכל $|x|<1$. אז לכל k טבעי $k=1,2,3,...$
גם טור $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)^k x^n$ מתכנס לכל $|x|<1$.

ג. (6 נק') אם טור מתכנס $\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x)=f(x)$ במידה שווה בקטע $[0,1]$, כאשר כל $p_n(x)$ הוא פולינום,
אז הפונקציה $f(x)$ גזירה לפחות בנקודה אחת בקטע $[0,1]$.

ד. (7 נק') תהי פונקציה $f(x,y):R^2\to R$ גזירה פעמיים ברציפות במישור R^2 ומקיימת את התכונה:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}>0$ בכל נקודה. אז לפונקציה $f(x,y)$ לא קיימת נקודת מקסימום מקומי.

בהצלחה!

__שאלה 1__ (א)

$$\frac{1}{n^{3/2}}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$$

ז"א זו סכום אינטגרלי של פונקציה $f(x)=\sqrt{x}$
בקטע $[0,1]$. פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$, לכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}$$

(ב)

$$\int_a^b f(x)\,dx=\{\text{בחלקים}\}=x f(x)\Big|_a^b-\int_a^b x\,d(f(x))=$$

$$=b f(b)-a f(a)-\int_a^b x\,d(f(x))$$

מתנאי $\begin{cases} f(b)=a \\ f(a)=b \end{cases}$ אז $b f(b)-a f(a)=0$

$$-\int_a^b x\,d(f(x))=\left\{\begin{matrix}\text{הצבה}\\ t=f(x)\\ x=g(t)\end{matrix}\right\}=-\int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\,dt=$$

$$=-\int_b^a g(t)\,dt=\int_a^b g(t)\,dt$$

שאלה 2

נסמן $M = \sup_{x\in R} |f(x)|$

נתון ש: $f_n(x) \to f(x)$ במ' שווה על R.

לכן $|f_n(x) - f(x)| < 1$ $\forall x\in R$ $\forall n>n_0$ $\exists n_0$

ולכן $|f_n(x)| < M+1$ $\forall x\in R$ $\forall n>n_0$.

המסקנה, עבור סדרה $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ פועל, לכן

יש קבוע $C>0$ ויש אינדקס $n'\in N$ כך ש:

$$|f_n(x)| \le C \qquad \forall x\in R \quad \forall n>n'$$
$$|g_n(x)| \le C$$

יהי $\varepsilon>0$.

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| = |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x) + f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \le$$

$$\le |f_n(x)|\,|g_n(x)-g(x)| + |g(x)|\,|f_n(x)-f(x)|$$

קיים אינדקס $n^* \ge n'$ כך ש:

$$|g_n(x)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2C} \qquad \forall x\in R \quad \forall n>n^*$$
$$|f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2C}$$

לכן

$\exists n^* \ \forall n>n^* \ \forall x\in R$

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \le \frac{\varepsilon}{2C}\cdot C + \frac{\varepsilon}{2C}\cdot C = \varepsilon$$

שאלה 3 נראה קודם כי קבוצה G_f קשירה מסילתית
יהיו שתי נקודות $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2) \in G_f$.
אז מהגדרה של קבוצה G_f נובע שגם נקודות
$P_1(x_1, y_1, 0) \in G_f$; $P_2(x_2, y_2, 0) \in G_f$.
קטע $[P_1, P_2]$ שמחבר נקודות P_1, P_2 כולו נמצא
בתוך קבוצה G_f ולכן קו שבור שמורכב מ 3 קטעים
$\Gamma = [M_1, P_1] \cup [P_1, P_2] \cup [P_2, M_2] \subset G_f$.
ולכן קבוצה G_f תמיד קשירה, לכל פונקציה f.
תהי f רציפה. אז על פי משפט ווירשטרס
f חסומה בריבוע ולכן
$G_f \subset [a,b]^2 \times [0, C]$
הקבוצה חסומה. (כאן $C = \max\limits_{(x,y) \in [a,b]^2} f(x,y)$.)
נוכיח ש G_f סגורה ב $\mathbb{R}^3$
יהי
$M_n(x_n, y_n, z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} M_0(x_0, y_0, z_0)$ ב $\mathbb{R}^3$.
מתוך רציפות של f מקבלים ש
$f(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0, y_0)$
מצד שני
$z_n \le f(x_n, y_n)$ לכל n, ולכן
$z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \le \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, z_n) = f(x_0, y_0)$
ולכן $M_0(x_0, y_0, z_0) \in G_f$ על פי הגדרה של הקבוצה G_f.
(ב) כן, G_f קשירה לכל מסילתית לכל f.
לא לכל רציפה G_f יכולה להיות קומפקטית. למשל
$f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \neq (a,a) \\ 1, & (x,y) = (a,a) \end{cases}$ אם $f(x$ לא רציפה בנקודה (a,a).

שאלה 4 (א) $|f(x,0)|=|f(0,y)|=0 \quad \forall x,y$

לכן גם $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$

ובדומה $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$!

$$f(x,y)-f(0,0)=0\cdot x+0\cdot y+\varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$

מכאן

$$\varepsilon(x,y)=\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$|\varepsilon(x,y)|\le\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

לכן $\lim_{x,y\to 0}\varepsilon(x,y)=0$, כלומר f דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$

(ב) כמו קודם $f(x,0)=f(0,y)=0$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

$$\varepsilon(x,y)=\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

אם $\alpha>1$! אז $x,y\to 0$

$$|\varepsilon(x,y)|=\left|\frac{x^\alpha\sin\left(\frac{y}{x}\right)+y^\alpha\sin\left(\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le$$

$$\le\frac{|y|\,x^{\alpha-1}+x\,y^{\alpha-1}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}x^{\alpha-1}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}y^{\alpha-1}\le$$

$$\le x^{\alpha-1}+y^{\alpha-1}$$

מכאן ! אם $\alpha>1$ אז $\lim_{x,y\to 0}\varepsilon(x,y)=0$, כלומר f דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$.

אם $\alpha\le 1$ אז

$$\varepsilon(x,x)=\frac{2x^\alpha\sin(1)}{\sqrt{2x^2}}\ \not\xrightarrow[x\to 0]{}\ 0$$

ואז f לא דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$.

שאלה 5

(א) נכונה.

$$\frac{1}{x}=t$$

$$\int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{x}\right) x^\alpha \, dx = \int_0^\infty \frac{\cos t}{t^{\alpha+2}}\, dt$$

אם $t\to\infty$ אז התנאי להתכנסות $\alpha+2>0$, כלומר $\alpha>-2$

אם $t\to 0$ אז $\cos t \to 1$ והתנאי להתכנסות $\alpha+2<1$, כלומר $\alpha<-1$

ומכאן צריך לקיים $-2<\alpha<-1$.

$\boxed{\text{לא נכון}}$

(ב) נסמן רדיוס התכנסות של הטור $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ ע"י R. אז

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}} \geq 1$$

אז לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים גם:

$$\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|^k}} = \left(\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^k \geq 1$$

$\boxed{\text{נכון}}$

(ג) $\boxed{\text{לא נכון}}$ לפי משפט ויירשטרס:

קיימת פונקציה רציפה ולא גזירה בשום נקודה בקטע. נסמן אותה $f(x)$.

מצד שני יש סדרת פולינומים $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ כך ש-$f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ במידה שווה בקטע.

נסמן $p_n(x)=f_n(x)-f_{n-1}(x)$. אז $p_n(x)$ פולינום

$\sum_{k=0}^{n} p_k(x) = f_n(x)$, כלומר $\sum_{k=0}^\infty p_k(x)=f(x)$ במידה שווה.

(ט) $\boxed{\text{נכון}}$

נניח (x_0,y_0) נקודה קריטית של f. אזי

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

וגם $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$.

לכן עבור $y=y_0$ הפונקציה $g(x)=f(x,y_0)$ מקבלת מינימום מקומי בנקודה $x=x_0$

ולכן (x_0,y_0) לא יכולה להיות מקסימום מקומי.