אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

הפקולטה למדעי הטבע
המחלקה למתמטיקה

## בחינה בחשבון אינפיניטסימלי 2 , תאריך 27.07.2012, מועד א'

מספר הקורס: 201-1-0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס

המרצה: ד"ר ארקדי ליידרמן

---

- משך הבחינה: 3 שעות
- יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. משקל של כל שאלה 25 נקודות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- **אין להשתמש בחומר עזר פרט למחשבון פשוט ללא צג גרפי.**
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב "**לא יודע**" ולקבל חמישית מהנקודות. הציון הסופי של שאלה יהיה מעוגל מעלה.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.

**מספר הנבחן** ____________________

## שאלה 1

א. (10 נקודות) תהי פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ומקיימת את התכונה הבאה:

$\int_a^b P(x)f(x)\,dx=0$ לכל פולינום $P(x)$ . אז $f(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$ . הוכיחו.

ב. (15 נק') תהי פונקציה $f(x):[0,\infty)\to[0,\infty)$ רציפה. נגדיר פונקציה $F(x)=1+\int_0^x f(t)\,dt$ .

נניח כי $f(x)\le F(x)$ לכל $x\ge 0$ . הוכיחו כי $f(x)\le e^x$ לכל $x\ge 0$ .

## שאלה 2

א. (15 נק') תהי פונקציה $f(x):R\to R$ גזירה פעמיים כך שנגזרת $f''(x)$ חסומה ב- $R$ .

נסמן $g_n(x)=n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x-\frac{1}{n}\right)\right)$.

הוכיחו שסדרת פונקציות $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה ב- $R$ . מהו הגבול $g(x)=\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ ?

ב. (10 נק') האם ללא הנחה כי $f''(x)$ חסומה ב- $R$ הטענה של סעיף א' עדיין נכונה ?

## שאלה 3

נתבונן בקשת של ציקלואידה $\{x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t): t\in[0,2\pi],\ a>0\}$ .

א. (10 נק') מצאו נפח גוף סיבוב המתקבל על ידי סיבוב של קשת סביב ציר ה- $x$ .

ב. (15 נק') מצאו ערך $t$ כך שנקודה $(x(t),y(t))$ על הקשת מחלקת אורכה ביחס $1:3$ .

**שאלה 4**

נתונה הפונקציה $f(x,y)=\frac{x^2+y}{x^2+y^2+1}$.

א. (15 נק') מצאו את הנקודות אקסטרמום המקומי של הפונקציה וקבעו את סוגיהן.

ב. (10 נק') מצאו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר של הפונקציה בתחום הבא $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$.

**שאלה 5** (25 נקודות) **4 הסעיפים בשאלה זו אינם קשורים אחד לשני!**

הוכיחו או הפריכו (באמצעות דוגמה נגדית) את הטענות הבאות:

א. (6 נק') אינטגרל לא אמתי $\int_0^\infty \sin(\frac{1}{x})x^\alpha\,dx$ מתכנס אם ורק אם $-2<\alpha<0$.

ב. (6 נק') נניח כי טור $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ מתכנס לכל $|x|<1$. אז לכל $k$ שלם גם טור $\sum_{n=0}^\infty (a_n)^k x^n$ מתכנס לכל $|x|<1$.

ג. (6 נק') לכל מספרים $p,q>0$ מתקיים שוויון $\int_0^1 (1-x^p)^{\frac{1}{q}}\,dx=\int_0^1 (1-x^q)^{\frac{1}{p}}\,dx$.

ד. (7 נק') פונקציה $f(x,y): R^2\to R$ רציפה בנקודה $(0,0)$ אם ורק אם 2 פונקציות $g_\lambda(x)=f(x,\lambda x);\quad h_\lambda(y)=f(\lambda y,y)$ רציפות ב- $0$ לכל $\lambda$ ממשי.

**בהצלחה!**

פתרון של מבחן באינפי - 2 , 27.07.2012

שאלה 1

(א) על פי משפט ווירשטרס קיימת סדרה של פולינומים $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש: $P_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ במידה שווה ב $[a,b]$.

לכן גם $P_n(x)\cdot f(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} [f(x)]^2$ במידה שווה ב $[a,b]$.

הסבר: נסמן $M = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. אז

$$\forall x \quad |P_n(x) f(x) - [f(x)]^2| = |f(x)|\cdot|P_n(x)-f(x)| \le$$

$$\le M\cdot|P_n(x)-f(x)| \le$$

$$\le M\cdot \max_{x\in[a,b]}|P_n(x)-f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ . משום ש: $P_n(x) f(x) \rightrightarrows [f(x)]^2$

אז על פי המשפט

$$\int_a^b P_n(x)\cdot f(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b [f(x)]^2 dx ,$$

ולכן על פי הנתון ש: $\int_a^b P(x) f(x) dx = 0$ מקבלים

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx = 0$$

משום ש: $f(x)$ רציפה ב $[a,b]$ זה גורר ש $[f(x)]^2 = 0$, כלומר $f(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$.

הסבר: אם קיים $f(x_0)\neq 0$ אז

$$\exists C>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$$

$$[f(x)]^2 \ge C$$

ואז

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \ge C\cdot 2\delta > 0$$

(ב) על פי המשפט היסודי של חדו"א

לכל $x\in[0,\infty)$ $F'(x)=f(x)$.

לכן $F'(x)\le F(x)$ לכל $x\in[0,\infty)$.

כי $F(x)\ge 1>0$, לכן מתקיים $\frac{F'(x)}{F(x)}\le 1$ $\forall x\in[0,\infty)$

ולכן $\int_0^x \frac{F'(t)}{F(t)}\,dt \le \int_0^x 1\,dt$

כלומר $\ln(F(t))\Big|_0^x \le x$ $\forall x\in[0,\infty)$

$F(0)=1$, לכן

$$\ln(F(x))\le x$$

כלומר $F(x)\le e^x$ $\forall x\in[0,\infty)$

אבל נתון $f(x)\le F(x)$, לכן גם $f(x)\le F(x)\le e^x$ כנדרש.

## שאלה 2

(א) על פי משפט לגרנז' קיימת נקודה $\xi_n(x)\in\left(x-\frac{1}{n},\, x+\frac{1}{n}\right)$ כך ש:

$$f\left(x+\tfrac{1}{n}\right)-f\left(x-\tfrac{1}{n}\right) = \frac{2}{n}\cdot f'(\xi_n(x))$$

לכן $g_n(x) = 2f'(\xi_n(x))$

נתון ש $f''(x)$ חסומה, כלומר קיים C כך ש $|f''(x)|\le C$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

שוב, על פי משפט לגרנז'

$$g_n(x)-2f'(x) = 2\left[f'(\xi_n(x))-f'(x)\right]=$$

$$=2f''(\eta_n(x))\cdot(\xi_n(x)-x)$$

לכן $|g_n(x)-2f'(x)|\le 2C\cdot\frac{1}{n}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

מסקנה: $g_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}2f'(x)$ במ"ש, שוב, ב $\mathbb{R}$:

$\forall\varepsilon\ \exists n_0\ \left(2C\frac{1}{n_0}<\varepsilon\right)\ \forall n>n_0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$|g_n(x)-2f'(x)|<\varepsilon$$

(ב) דוגמא נגדית $f(x)=x^4$.

$$g_n(x)=n\left(\left(x+\tfrac{1}{n}\right)^4-\left(x-\tfrac{1}{n}\right)^4\right)=$$

$$=8x^3+8x\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$g_n(x) - 2f''(x) = 8x \cdot \frac{1}{n^2}$$

סדרה $\left\{8x \cdot \frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת במידה

שווה בתחום $(-\infty,\infty)$.

שאלה 3

(א) נפח גוף סיבוב

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1-\cos t) \\ t \in [0, 2\pi] \end{array} \right\} =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\,dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right) dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + \tfrac{3}{2}(1+\cos 2t) - \cos t(1-\sin^2 t)\right) dt =$$

$$= \pi a^3 \left(\tfrac{5}{2}t + \left(-3\sin t + \tfrac{3}{4}\sin 2t - (\sin t - \tfrac{1}{3}\sin^3 t)\right)\right)\Bigg|_{t=0}^{2\pi} =$$

$$= 5\pi^2 a^3$$

(ג) $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$ אורך | עקום

אנו מחפשים $T \in [0, 2\pi]$ כך ?

$$\int_0^T \sqrt{\ast}\, dt : \int_T^{2\pi} \sqrt{\ast}\, dt = 1 : 3$$

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = a^2\left((1-\cos t)^2 + \sin^2 t\right) =$$

$$= a^2(2 - 2\cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = \int_{\alpha} 2a^2 \sin \frac{t}{2}\, dt = -4a^2 \cos\frac{t}{2}\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta}$$

מקבלים ?

$$\frac{\cos\frac{t}{2}\Big|_0^T}{\cos\frac{t}{2}\Big|_T^{2\pi}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\cos\frac{T}{2} - 1}{-1 - \cos\frac{T}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\cos\frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

תשובה:

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2}{3}\pi}$$

שאלה 4.

א.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x\left(x^2+y^2+1\right)-2x\left(x^2+y\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}=\frac{2x\left(y-y+1^2\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1\left(x^2+y^2+1\right)-2y\left(x^2+y\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}=\frac{x^2-y^2+1-2yx^2}{\left(x^2+y^2+1\right)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0\Rightarrow x=0$$

$$x=0 \quad and \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0\Rightarrow \quad y=\pm 1$$

לכן $M_1(0,1);M_2(0,-1)$ 2 נקודות סטציונריות

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2\left(y^2-y+1\right)\left(x^2+y^2+1\right)^2-8x^2\left(y^2-y+1\right)\left(x^2+y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=2x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\left(y^2-y+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\left(-2y-2x^2\right)\left(x^2+y^2+1\right)^2-4y\left(x^2-y^2+1-2yx^2\right)\left(x^2+y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^4}$$

עבור $M_1(0,1)$; נקודת אוכף $\begin{pmatrix}1/4 & 0\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}$; $\Delta=-\frac{1}{8}<0$

עבור $M_2(0,-1)$ נקודת מינימום $A>0$; $\begin{pmatrix}3/4 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$; $\Delta=\frac{3}{8}>0$ .     $f(0,-1)=-\frac{1}{2}$; $f(0,1)=\frac{1}{2}$

ב. נחקור על השפה $x^2=1-y^2$ .

$$g(y)=\frac{\left(1-y^2+y\right)}{2};\ \ y\in[-1,1]$$

מקבלים $$g'(y)=\frac{-2y+1}{2}=0\Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8};g(-1)=-\frac{1}{2};g(1)=\frac{1}{2}$$

$g(-1)=-\frac{1}{2}$ - ערך הכי קטן     $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$ - ערך היכ גדול

$f(0,-1)=-\frac{1}{2}$     $f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$

שאלה 5

(א)

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{1}{x}\right) x^\alpha dx = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x}=t \\ x=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \end{array} \right\} =$$

$$= -\int_\infty^0 \sin t \ \frac{1}{t^\alpha} \ \frac{dt}{t^2} = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}} dt$$

$$\sin t \sim t, \quad t \to 0$$

לכן עבור $t\to 0$ תנאי ההתכנסות $\alpha+1<1$

עבור $t\to\infty$ תנאי התכנסות $\alpha+2>0$

$-2<\alpha<0$, $\boxed{\text{נכון}}$

(ב) טענה $\boxed{\text{לא נכונה}}$ מלבד למספר $k$ שלם.

למשל $k=-1$.

דוגמה: הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ מתכנס לכל $2<|x|$

מספר עבור $|x|<1$

אבל טור $\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$ מתכנס רק

עבור $|x|<\frac{1}{2}$.

(ד) אכן נכון,

$$\{נסמן\} \quad (1-x^p)^{\frac{1}{q}} = t$$

$$(1-x^p) = t^q \qquad \text{אז}$$

$$x = (1-t^q)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{ואז}$$

$$\int_0^1 (1-x^p)^{\frac{1}{q}}\,dx = \{\text{בחלקים}\} =$$

$$= x(1-x^p)^{\frac{1}{q}}\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x\,d\left((1-x^p)^{\frac{1}{q}}\right) = \{\text{הצבה } (*)\}$$

$$= \int_0^1 (1-t^q)^{\frac{1}{p}}\,dt$$

$\boxed{\text{נכון}}$

(ה) $\boxed{\text{לא נכון}}$ דוגמה נגדית

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g_\lambda(x) = \frac{\lambda x^3}{x^4+\lambda^2x^2} = \frac{\lambda}{x^2+\lambda_2}x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$h_\lambda(y) = \frac{\lambda^2 y^3}{\lambda^4y^4+y^2} = \frac{\lambda}{\lambda^4y^2+1}y \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$

$$f(x,x^2) = \frac{1}{2} \not\to 0 \qquad \text{אבל}$$