



תאריך הבחינה: 3.8.2012
מבחן ב: חשבון אינפיניטיסימלי 2
מס' קורס: 201-1-0021
שנה: תשע"ב סמסטר: ב מועד: ב
שמות המרצים: ארקדי ליידרמן ואור שליט
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: מחשבון פשוט ללא צג גרפי

ענו על ארבע מתוך חמשת השאלות הבאות. נא לציין אילו שאלות אתם רוצים שנבדוק.

הקפידו להסביר כל צעד במהלך הפתרון, ולציין את המשפטים והטענות עליהם אתם מסתמכים.
בכל סעיף/שאלה ניתן לכתוב "לא יודעת" ולקבל חמישית מהנקודות (מעוגלות מעלה לחצי הנקודה הקרובה). **סעיפים/שאלות בהם כתבתם "לא יודעת" לא ייבדקו.**

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נק')

תהי $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית רימן. לכל n תהי f_n פונקציה לינארית למקוטעין על הקטע $[0,1]$ המוגדרת באופן הבא: $f_n\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$ עבור $k = 0,1,2, \dots, n$

ו- f_n לינארית בכל קטע מהצורה $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $k = 0,1, \dots, n-1$.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. (10 נק') הסדרה $\{f_n\}$ מתכנסת במידה שווה ל- f בקטע $[0,1]$.

ב. (15 נק') לכל n , נסמן ב- $I_n(f)$ את הקרוב ל- $\int_0^1 f(x) dx$ המתקבל על-ידי

הפעלת כלל הטרפז עם n נקודות. אזי $I_n(f) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$.

שאלה 2 (25 נק')

נתון שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס, (לא ידוע שאיברי הטור הם אי-שליליים).

א. (8 נק') הוכיחו שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^n$ מתכנס לכל $|x| < 1$.

ב. (9 נק') האם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס בהכרח במידה שווה בקטע

$[0,1)$?

ג. (8 נק') הוכיחו שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ מתכנס לכל $|x| < 1$.

שאלה 3 (25 נק') שני הסעיפים בשאלה זו אינם קשורים אחד לשני!

א. (13 נק') תהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית, ותהי $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. הגרף של f זו

תת הקבוצה של \mathbb{R}^{n+1} המוגדרת על-ידי

$$G_f = \{(x, y): x \in K, y = f(x)\}$$

הוכיחו ש- G_f קבוצה קומפקטית.

ב. (12 נק') נניח ש- $f, f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות גזירות ברציפות, ונניח

שהסדרה f_n מתכנסת במידה שווה ל- f . הראו על-ידי דוגמא **מפורשת** מתאימה **שלא בהכרח** מתקיים ש- $L(f_n) \rightarrow L(f)$, (כאשר לכל פונקציה גזירה ברציפות g נסמן ב- $L(g)$ את אורך העקום $\{(t, g(t)): t \in [0,1]\}$.)

שאלה 4 (25 נק')

נתונה הפונקציה

$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

מצאו פולינום $p(x, y)$ כך שלכל $(x, y) \in B_{0.1}(0)$ מתקיים

$$|p(x, y) - f(x, y)| < \frac{1}{2000}$$

יש לנמק!

שאלה 5 (25 נק')

יהי $k \geq 1$ מספר טבעי, ותהי a_0, a_1, \dots, a_k סדרה סופית, כך ש $a_i > 0$ לכל i . נגדיר פולינום

$$p(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i$$

כמו כן, לכל n נגדיר $b_n = \sum_{m=1}^n p(m)$.

א. (13 נק') הוכיחו שקיימים קבועים $0 < c < C$ כך שלכל $n \geq 1$ מתקיים

$$cn^{k+1} \leq b_n \leq Cn^{k+1}$$

(רמז: שימו לב ש- $p(x)$ פונקציה עולה בחצי הישר החיובי)

ב. (12 נק') עבור כל אחד מהטורים הבאים, קבעו האם הוא מתכנס בהחלט, בתנאי, או לא מתכנס. נמקו! (ניתן להשתמש בסעיף אי גם אם לא הצלחתם)

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + 700 \cdot \frac{1}{n}\right)^n b_n$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{b_n}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[k+2]{b_n}}$

בהצלחה!