אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

הפקולטה למדעי הטבע
המחלקה למתמטיקה

בוחן בחשבון אינפיניטסימלי 2, תאריך 27.05.2020

מספר הקורס: 201.1.0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס

המרצה: פרופ' ארקדי ליידרמן

- משך הבוחן: 2 שעות.
- חומר עזר: אין.
- <u>יש לענות על כל 3 שאלות.</u>
- <u>יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!</u>
- <u>בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב **"לא יודע"** ולקבל חמישית מהנקודות.</u>
- <u>שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.</u>

מספר הנבחן ____________________

<u>שאלה 1</u> (35 נקודות)

נתון כי פונקציה $f(x):R\to R$ רציפה. הוכיחו כי פונקציה $f(x)$ זוגית, כלומר $f(x)=f(-x)$ לכל x,
אם ורק אם מתקיים השוויון $\int_0^a f(x)dx=\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x}dx$ לכל a.

<u>שאלה 2</u> (35 נקודות)

(א) (15 נקודות) מצאו את השטח שחסום ע"י הקווים $y=\frac{x^3-1}{x^4+4x^2}$, $y=1-x$ ו- $x=2$.

(ב) (20 נקודות) העקומה מוגדרת באופן פרמטרי $\Gamma=\{(x(t),y(t)):x(t)=a\cos^3 t,\ y(t)=a\sin^3 t\}$,
כאשר $a>0$ קבוע ו- $t\in[0,2\pi]$. חשבו את האורך של העקומה Γ.

<u>שאלה 3</u> (35 נקודות)

(א) (10 נקודות) תנו דוגמא של פונקציה <u>חסומה</u> $f(x)$ כך ש $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס אבל $\int_0^\infty f^2(x)dx$ מתבדר.

(ב) (10 נקודות) הוכיחו שאם פונקציה $f(x)$ <u>חסומה</u> ו- $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס <u>בהחלט</u> אז גם $\int_0^\infty f^2(x)dx$ מתכנס.

(ג) (15 נקודות) תנו דוגמא של פונקציה $f(x)$ כך ש- $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס <u>בהחלט</u> אבל $\int_0^\infty f^2(x)dx$ מתבדר.

בהצלחה!

פתרונות של מתן 27.05.2020

שאלה מס' 1

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{x}}dx=\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{x}}dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{x}}dx$$

מאדיטיביות האינטגרל נחליף משתנה x ב- $-x$

$$\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{x}}dx=\int_{a}^{0}\frac{f(-x)}{1+e^{-x}}d(-x)=\left\{\begin{array}{l}\text{אם } f(x) \text{ זוגית}\\ \text{אז } f(-x)=f(x)\end{array}\right\}=$$

$$=\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{e^{x}+1}e^{x}dx$$

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{x}}dx=\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{e^{x}+1}e^{x}dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{x}}dx=\int_{0}^{a}f(x)dx$$

מכיוון השוויון נשמר ממשפט היסודי של חדו"א
ונגזור שני אגפים של שוויון. מותר להשתמש
במשפט זה כי $f(x)$ פונקציה רציפה.

$$\left(\int_{0}^{a}f(x)dx\right)'=f(a).\qquad \text{לכל } a$$

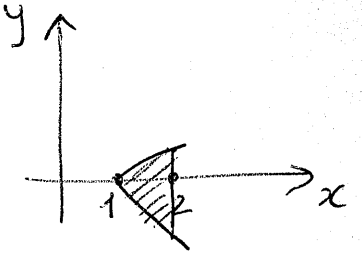
$$\left(\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{x}}dx\right)'=\frac{f(a)}{1+e^{a}}-\frac{f(-a)}{1+e^{-a}}(-1)\Rightarrow$$

$$\frac{f(-a)}{\cancel{1+e^{-a}}}=f(a)\left(1-\frac{1}{1+e^{a}}\right)=\frac{f(a)}{\cancel{1+e^{-a}}}$$

משום ש $1+e^{-a}\neq 0$ אז

$f(-a)=f(a)$ לכל a.

(1c) **שאלה 2**



$$S = \int_1^2 \left(\frac{x^3-1}{x^4+4x^2} - (1-x) \right) dx$$

$$\frac{x^3-1}{x^4+4x^2} = \frac{x^3-1}{x^2(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$x^3-1 = Ax(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)x^2$$

$$x=0 \Rightarrow -1 = 4B \Rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{4}}$$

$$x^3-1 = Ax(x^2+4) - \frac{1}{4}x^2 - 1 + (Cx+D)x^2$$

$$x^2 = A(x^2+4) - \frac{1}{4}x + (Cx+D)x$$

$$x=0 \Rightarrow \boxed{A=0}$$

$$x = -\frac{1}{4} + Cx + D \Rightarrow \boxed{C=1}, \quad \boxed{D = \frac{1}{4}}$$

$$\frac{x^3-1}{x^4+4x^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x^2} + \frac{x+\frac{1}{4}}{x^2+4}$$

$$S = \int_1^2 \left(-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2} + \frac{x+\frac{1}{4}}{x^2+4} + (x-1) \right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{(x-1)^2}{2} \right) \Bigg|_1^2 =$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5} + \frac{1}{8}\left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5} + \frac{\pi}{32} - \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$$

(ג)

$$x'(t) = -3a\cos^2 t\cdot \sin t$$
$$y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$$
$$[x'(t)]^2+[y'(t)]^2 = 9a^2(\cos^4 t\sin^2 t)(\cos^2 t+\sin^2 t) =$$
$$= 9a^2\cos^2 t\sin^2 t = \frac{9}{4}a^2(\sin 2t)^2$$
$$l = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{9}{4}a^2(\sin 2t)^2}\,dt = 6a\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt =$$
$$= 6a\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = 6a$$

<u>שאלה 3</u> (א) $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$. אם $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ מתכנס

על פי מבחן דיריכלה, אבל $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx$ מתבדר.

דוגמא אחרת $0\le x<1$, $f(x)=0$

אם $n\le x<n+1$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}(-1)^n$

לכל $n=1,2,3\ldots$

אז $\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}(-1)^n$ מתכנס

אבל $\int_0^\infty f^2(x)dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ מתבדר

(ב) אם $\exists C>0\ |f(x)|\le C$

אז $f^2(x)\le C|f(x)|$ לכל x מתקיים

נתון כי אינטגרל $\int^\infty |f(x)|dx$ מתכנס

אז גם $\int_0^\infty f^2(x)dx$ מתכנס על פי מבחן ההשוואה.

(ג) נגדיר

$$\begin{cases} f(x)=0 & \text{אם } 0\le x<1 \\ f(x)=n & \text{ואם } n\le x<n+\frac{1}{n^3} \end{cases}$$

עבור $n=1,2,\ldots$

$$\int_0^\infty f(x)\,dx=\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{n^3}=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$$ אזי מתכנס

$$\int_0^\infty f^2(x)\,dx=\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2}{n^3}=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}=\infty$$ אולם מתבדר