אוניברסיטת בן-גוריון בנגב | הפקולטה למדעי הטבע
Ben-Gurion University of the Negev | המחלקה למתמטיקה

בוחן בחשבון אינפיניטסימלי 2, תאריך 24.11.2020
מספר הקורס: 201.1.0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: פרופ' ארקדי ליידרמן

- משך הבוחן: 2 שעות. חומר עזר: אין.
- <u>יש לענות על כל 3 שאלות.</u>
- <u>יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!</u>
- <u>בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב **"לא יודע"** ולקבל חמישית מהנקודות.</u>
- <u>שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.</u>

מספר הנבחן ____________________

<u>שאלה 1</u> (35 נקודות)

נתון שפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ומקיימת תכונות : $f(x)\geq 0$ ו- $\int_a^b f(x)dx=0$.

הוכיחו כי לכל פונקציה $g(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ מתקיים כי $\int_a^b f(x)g(x)dx=0$.

<u>שאלה 2</u> (35 נקודות)

תהי פונקציה $f(x)$ מוגדרת ורציפה לכל $x\in R$. הוכיחו שאם $\int_a^{2a} f(x)dx=\int_{-2a}^{-a} f(x)dx$ לכל $a>0$

אז פונקציה $f(x)$ זוגית, כלומר $f(x)=f(-x)$ לכל $x>0$.

<u>שאלה 3</u> (30 נקודות)

(א) (15 נקודות) מצאו את האורך של העקומה שמוגדרת במערכת פולרית $\left\{r=e^{\sqrt{3}\varphi},\varphi\in[0,1]\right\}$.

(ב) (15 נקודות) מצאו את הנפח גוף שמתקבל על ידי סיבוב של גרף של פונקציה $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+2\cos^2 x}}$,

כאשר $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{3}$, סביב ציר x.

בהצלחה!

פתרון של מבחן באנפ' 2, 24.11.2020

<u>שאלה 1</u> פונקציה $g(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ לכן חסומה. לכן קיימים שני קבועים C_1, C_2 כך ש
$C_1 \le g(x) \le C_2$ לכל $x\in[a,b]$,
נתון כי $f(x)\ge 0$ לכל x, לכן בהכפלה ב $f(x)$ לא משנו אי-שוויון:
$C_1 \cdot f(x) \le f(x)g(x) \le C_2 \cdot f(x)$ לכל $x\in[a,b]$

לכן
$$\underbrace{C_1\cdot\int_a^b f(x)dx}_{=0} \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \underbrace{C_2\cdot\int_a^b f(x)dx}_{=0}$$

לכן
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$

יש פתרון מלא באתר. מבחן 2007 מועד ב'

<u>שאלה 2</u> יהי $x>0$ כלשהו. על פי הנתון

$$\int_{-x}^{-x/2} = \int_{x/2}^{x} f(t)\,dt$$

$$\int_{-x/2}^{-x/4} = \int_{x/4}^{x/2} f(t)\,dt$$

$$\vdots$$

לכל $n\in N$
$$\int_{-x/2^n}^{-x/2^{n+1}} = \int_{x/2^{n+1}}^{x/2^n} f(t)\,dt$$

ניקח סכום ונקבל כי

לכל $n\in N$
$$\int_{-x}^{-x/2^{n+1}} = \int_{x/2^{n+1}}^{x} f(t)\,dt$$

$f(x)$ רציפה, לכן אם נעביר לגבול $n\to\infty$ נקבל

כי $\int_{-x}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{x} f(t)dt$ לכל x.

עכשיו ניתן לגזור משני הצדדים של שוויון
$f(x)$ רציפה, לכן, על פי המשפט היסודי של חדו"א

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{-x}^{0} f(t)dt\right) = -f(-x)\cdot(-x)' = f(-x) \;;\; \frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{x} f(t)dt\right) = f(x)$$

ומכאן $f(-x) = f(x)$ לכל x כנדרש.

<u>שאלה 3</u> (א)

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{e^{2\sqrt{3}\varphi} + (\sqrt{3})^2 e^{2\sqrt{3}\varphi}}\, d\varphi = \int_0^1 2e^{\sqrt{3}\varphi} d\varphi =$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} e^{\sqrt{3}\varphi}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(e^{\sqrt{3}} - 1\right)$$

(ב)

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_0^{\pi/3} \frac{1}{1+2\cos^2 x}\,dx =$$

פה נבצע כך פתרון הא' $tg\, x = t$

$$t^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{t^2+1}$$

$$x = arctg\, t \Rightarrow dx = \frac{1}{t^2+1}dt$$

$$V = \pi \int_{tg\,0}^{tg(\pi/3)} \frac{1}{1+\frac{2}{t^2+1}} \frac{dt}{t^2+1} = \pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+3}\,dt =$$

$$= \pi \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} arctg 1 = \frac{\pi^2}{4\sqrt{3}}$$