

בוזון בחשבון אינפיניטסימלי 2, תאריך 24.11.2017
מספר הקורס: 201.1.0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: ד"ר ארקדי ליידרמן

- משך הבחון: 2 שעות. חומר עזר: אין.
- יש לענות על כל 3 שאלות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב "לא יודע" ולקבל חמישית מהנקודות.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.

מספר הנבחן

שאלה 1 (35 נקודות)

(א) (15 נקודות) מצאו את כל פונקציות רציפות $f(x)$ שמקיימות את התכונה הבאה:

$$\int_0^1 f(xt) dt = f(x) \text{ לכל קבוע } x.$$

(ב) (20 נקודות) מצאו את כל פונקציות רציפות $f(x)$ שמקיימות את התכונות הבאות: $f(x) > 0$ לכל $x \neq 0$

$$-1 \int_0^1 f(xt) dt = \frac{1}{2017} f(x) \text{ לכל קבוע } x.$$

שאלה 2 (35 נקודות)

(א) (15 נקודות) נניח שפונקציה $\varphi(\alpha)$ רציפה לכל α ועקומה $C = \{(x(t), y(t)) : 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}\}$ מוגדרת על ידי הצגה

$$\text{פרמטרית הבאה: } \{x(t) = \int_0^{tg(t)} \sin(\varphi(\alpha)) d\alpha, y(t) = \int_0^{tg(t)} \cos(\varphi(\alpha)) d\alpha\}. \text{ מצאו את אז האורך של העקומה } C.$$

(ב) (20 נקודות) בעזרת תכונות של אינטגרל רימן חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n+k) - \ln n}{n+k}$

שאלה 3 (30 נקודות)

מצאו פונקציות קדומות

$$(א) \int x (\ln x)^2 dx \text{ (15 נקודות)} ; (ב) \int \frac{1}{\cos x + 2\sin x + 3} dx \text{ (15 נקודות)}$$

בהצלחה!

$$l = \int_0^{\pi/4} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

(1)

$$x'(t) = \left(\int_0^{tg(t)} \sin(\varphi(\alpha)) d\alpha \right)' = \sin(\varphi(tg(t))) \cdot \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$y'(t) = \cos(\varphi(tg(t))) \cdot \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \frac{1}{\cos^4 t} = \frac{1}{\cos^4 t}$$

$$l = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 t} dt = tg t \Big|_0^{\pi/4} = 1$$

$$\frac{\ln(n+k) - \ln(n)}{n+k} = \frac{1}{n} \frac{\ln(1 + \frac{k}{n})}{1 + \frac{k}{n}} \quad (2)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n+k) - \ln n}{n+k} = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$

$[1,2] \text{ } \delta > 0 \text{ } f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$\rho' > \delta n \text{ } n \delta \text{ } (1,2) \text{ } \delta < \rho \text{ } \rho > \delta n \text{ } \rho > \delta \text{ } \rho' > \delta n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} (\ln 2)^2$$

(1C) 3 12 512e

$$\int x (\ln x)^2 dx = \frac{1}{2} \int (\ln x)^2 d(x^2) = \text{part by part} =$$

$$= \frac{1}{2} (\ln x)^2 \cdot x^2 - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot 2 \frac{\ln x}{x} dx =$$

$$\frac{1}{2} (\ln x)^2 \cdot x^2 - \int x \ln x dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 x^2 - \frac{1}{2} \int \ln x d(x^2) = \text{part by part}$$

$$= \frac{1}{2} (\ln x)^2 x^2 - \frac{1}{2} (\ln x \cdot x^2 - \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx) =$$

$$= \frac{1}{2} (\ln x)^2 \cdot x^2 - \frac{1}{2} \ln x \cdot x^2 + \frac{1}{4} x^2 + C =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} x^2 \left((\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2} \right) + C}$$

part by part $\int (\ln x)^2 dx$ (2)

$$t = \tan \frac{x}{2}; \quad \frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos x; \quad \frac{2t}{1+t^2} = \sin x, \quad \frac{2dt}{1+t^2} = dx$$

$$\int = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{1-t^2+4t+3(1+t^2)} dt =$$

$$= \int \frac{2}{2t^2+4t+4} dt = \int \frac{1}{t^2+2t+2} dt = \arctan(t+1) + C$$

$$= \boxed{\arctan\left(\tan \frac{x}{2} + 1\right) + C}$$