בוחן בחשבון אינפיניטסימלי 2, תאריך 22.11.2018
מספר הקורס: 201.1.0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: ד"ר ארקדי ליידרמן

- משך הבוחן: 2 שעות. חומר עזר: אין.
- יש לענות על כל 3 שאלות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב **"לא יודע"** ולקבל חמישית מהנקודות.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.

מספר הנבחן ________________

שאלה 1 (35 נקודות)

נתון כי פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(\sqrt[n]{x})\,dx = f(1)$.

שאלה 2 (35 נקודות)

(א) (15 נקודות) תהי פונקציה $f(x)$ רציפה וזוגית. מצאו ערך של $\int_{-a}^{a} x f(x)\,dx$ עבור a כלשהו.

(ב) (20 נקודות) חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\,\mathrm{arctg}\left(\frac{i}{n}\right)$

שאלה 3 (30 נקודות)

תהי נתונה פונקציה $f(x)=\sqrt{1-\sin 2x}$.

(א) (15 נקודות) מצאו שטח של קבוצה $D=\{(x,y): 0\le y\le f(x), 0\le x\le \frac{\pi}{2}\}$.

(ב) (15 נקודות) מצאו נפח גוף שמתקבל על ידי סיבוב של קבוצה D סביב ציר x.

בהצלחה!

פתרון של בוחן באינפי 2, 22.11.2018

<u>שאלה 1</u> פונקציה רציפה, לכן לפי משפט "ערך ממוצע אינטגרלי" קיימת נקודה $c_n \in [\frac{1}{n}, 1]$ כך ש:

$$\int_{1/n}^{1} \cancel{f}f(\sqrt[n]{x})\,dx = \left(1-\frac{1}{n}\right) f(\sqrt[n]{c_n})$$

$\frac{1}{n} \le c_n \le 1$, לכן $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \le \sqrt[n]{c_n} \le 1$.

ידוע כי $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, לכן על פי "סנדוויץ'" גם $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = 1$

לפי רציפות של $f(x)$ מקבלים כי $\lim\limits_{n\to\infty} f(\sqrt[n]{c_n}) = f(1)$.

ומכאן

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{1} f(\sqrt[n]{x})\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) \lim_{n\to\infty} f(\sqrt[n]{c_n}) = f(1)$$

<u>שאלה 2</u> (א) $f(x)$ זוגית ורציפה, לכן $x f(x)$ אי-זוגית ורציפה.

$$\int_{-a}^{a} x f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} x f(x)\,dx + \int_{0}^{a} x f(x)\,dx$$

$$\int_{-a}^{0} x f(x)\,dx = \left\{\begin{matrix}\text{הצבה} \\ x=-x' \\ dx=-dx'\end{matrix}\right\} = \int_{a}^{0} (-x') f(-x')\,d(-x') = -\int_{0}^{a} x f(x)\,dx$$

לכן $\int_{-a}^{a} x f(x)\,dx = 0$ לכל a

(ב)

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\, arctg\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\, arctg\left(\frac{i}{n}\right)$$

זה מבטא סכום אינטגרלי של פונקציה $f(x) = x\, arctg x$ בקטע $[0,1]$ כאשר חלוקה של קטע $[0,1]$ היא חלוקה על ידי נקודות $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$.

$f(x)$ רציפה, לכן סכומים אינטגרליים מתכנסים לאינטגרל

$$\lim_{n\to\infty} = \int_0^1 x\, arctg x = \frac{1}{2}\int_0^1 arctg x\, d(x^2) =$$

בחלקים

$$= \frac{1}{2} arctg x \cdot x^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} arctg x \cdot x^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2}(x - arctg x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

3 שאלה

$$1-\sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x = (\sin x - \cos x)^2$$

$$\sqrt{1-\sin 2x} = |\sin x - \cos x|$$ לכן

$$S = \int_0^{\pi/2} |\sin x - \cos x|\,dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx +$$ (א)

$$+ \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)\,dx = (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} - (\sin x + \cos x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$= 2(\sin x + \cos x)\Big|_{x=\pi/4} - 1 - 1 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

$$V = \pi\int_0^{\pi/2} f^2(x)\,dx = \pi\int_0^{\pi/2} (1-\sin 2x)\,dx =$$ (ב)

$$= \pi\left(x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\pi/2} = \pi\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$