



בוחרן בחשבון אינפיניטסימלי 2, תאריך 14.06.2012
מספר הקורס: 201.1.0011, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: ד"ר ארקדי ליידרמן

- משך הבוחן: 2 שעות
- אין להשתמש בכל חומר עזר
- בבוחן ישנן 4 שאלות. יש לענות על 3 שאלות בלבד מתוך 4.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!

מספר הנבחן _____

שאלה 1 (35 נקודות)

תהי פונקציה $f(x)$ מוגדרת ורציפה בתחום $[0, \infty)$. נניח כי מתקיימת התכונה הבאה:

$$\text{קיים קבוע } C \text{ כך ש } \int_x^{2x} f(t) dt = C \text{ לכל } x > 0. \text{ הוכח ש } f(x) = 0 \text{ לכל } x \in [0, \infty).$$

למה פונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ לא סותרת לטענה של שאלה?

שאלה 2 (35 נקודות)

תהי פונקציה $f(x)$ מוגדרת ורציפה בתחום $[0, \infty)$. נניח כי מתקיימת התכונה הבאה:

$$b > 0 \text{ לכל } \left| \int_0^b f(t) dt \right| < 2012$$

א. הוכח כי האינטגרל לא אמתי $\int_0^\infty f(e^x) dx$ מתכנס.

ב. האם האינטגרל לא אמתי $\int_0^\infty f(e^{-x}) dx$ בהכרח מתכנס? אם כן – הוכח, אם לא – תן דוגמה נגדית.

שאלה 3 (35 נקודות)

תהי פונקציה $S(x)$ מוגדרת כסכום הטור $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$. הראה כי

א. הפונקציה $S(x)$ מוגדרת ורציפה לכל $x \in (-\infty, \infty)$.

ב. הטור לא מתכנס במידה שווה בתחום $(-\infty, \infty)$.



שאלה 4 (35 נקודות)

יהיו $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ שני טורי חזקות בעלי רדיוס התכנסות $0 < R_1 < \infty$ ו- $0 < R_2 < \infty$ בהתאמה.

א. הוכח כי רדיוס התכנסות של טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$ מקיים $R \geq R_1 R_2$.

ב. האם השוויון $R = R_1 R_2$ תמיד מתקיים? אם כן – הוכח, אם לא – תן דוגמה נגדית.

בהצלחה!