אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

הפקולטה למדעי הטבע
המחלקה למתמטיקה

בוחן בחשבון אינפיניטסימלי 2, תאריך 14.05.2019
מספר הקורס: 201.1.0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: פרופ' ארקדי ליידרמן

- משך הבוחן: 2 שעות. חומר עזר: אין.
- יש לענות על כל 3 שאלות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב **"לא יודע/ לא יודעת"** ולקבל חמישית מהנקודות.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.

מספר הנבחן ____________

שאלה 1 (50 נקודות) נתון כי פונקציה $f(x)$ רציפה בתחום $[0,\infty)$ ומקיימת את התכונה:

$f(x)>0$ לכל $x>0$ רציונלי. נגדיר פונקציה $$\varphi(x)=\frac{\int_0^x t\,f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$ לכל $x>0$.

(א) (25 נקודות) הוכיחו כי פונקציה $\varphi(x)$ מוגדרת היטב, כלומר $\int_0^x f(t)dt\neq 0$ לכל $x>0$.

(ב) (25 נקודות) הוכיחו כי פונקציה $\varphi(x)$ מונוטונית עולה חזק ומצאו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0+}\varphi(x)$.

שאלה 2 (25 נקודות)

מצאו את הגבול $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\pi\sqrt{\frac{1}{n}}+\sin\pi\sqrt{\frac{2}{n}}+\sin\pi\sqrt{\frac{3}{n}}+...+\sin\pi\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right).$$

שאלה 3 (25 נקודות)

(א) (10 נקודות) מצאו את השטח שחסום ע"י $y=\frac{x^3+2}{x^3+x^2}$, ציר x, והישרים $x=1, x=2$.

(ב) (15 נקודות) נתון כי פונקציה $f(t)$ גזירה ברציפות ב- $(-\infty,\infty)$. נתבונן בשתי עקומות

שמוגדרות בצורה פרמטרית: $$\Gamma_1=\{(x(t),y(t)):x(t)=\int_0^t f(s)ds-f(t),\ y(t)=\int_0^t f(s)ds+f(t)\}$$

$$\Gamma_2=\{(x(t),y(t)):x(t)=f(t)(\sin t-\cos t),\ y(t)=f(t)(\sin t+\cos t)\}$$

הוכיחו כי לכל קטע $[a,b]$ אורך של קשת עקומה $\{\Gamma_1:t\in[a,b]\}$ שווה לאורך של קשת עקומה $\{\Gamma_2:t\in[a,b]\}$

בהצלחה!

פתרון של מבחן באינפי 2 ,   14.05.2019

<u>שאלה 1</u> (א) יהי $x>0$ כלשהו. משום שקבוצה של מספרים רציונליים צפופה ב $\mathbb{R}$ אזי יש סדרה של מספרים רציונליים $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש $q_n \to x$. מרציפות של פונקציה $f(x)$ נובע כי $f(q_n)\to f(x)$ ומשום ש $f(q_n)>0$ לכל n אזי $f(x)\geq 0$.

נוכיח עכשיו כי $\varphi(x)>0$ לכל $x>0$.

נקבע מספר רציונלי q כך ש $0<q<x$. נתון ש $f(q)>0$. נבחר $\varepsilon=\frac{f(q)}{2}$. אז על פי רציפות של פונקציה f בנקודה q קיים $\delta>0$ כך ש

$$(q-\delta,q+\delta)\subset(0,x)$$

!

$$|f(t)-f(q)|<\varepsilon \qquad \forall t\in(q-\delta,q+\delta)$$

לכן

$$f(t)>f(q)-\varepsilon=\varepsilon \qquad \forall t\in(q-\delta,q+\delta)$$

לכן משום ש $f(x)\geq 0$ לכל $x>0$

$$\int_0^x f(t)\,dt \geq \int_{q-\delta}^{q+\delta} f(t)\,dt \geq \varepsilon\cdot 2\delta>0$$

(ב) נסמן

$$G(x)=\int_0^x t f(t)\,dt \ ; \quad F(x)=\int_0^x f(t)\,dt.$$

$f(t)$, $tf(t)$ פונקציות רציפות, לכן על פי המשפט היסודי של חדו"א

$$F'(x)=f(x), \quad G'(x)=xf(x)$$

פונקציה $\varphi(x)$ גזירה, לכן $\varphi(x)$ עולה מונוטונית חזק אם ורק אם מתקיים $\varphi'(x)\geq 0$ לכל $x>0$ ואין שום קטע (α,β) כך ש $\varphi'(x)=0$ לכל $x\in(\alpha,\beta)$, כלומר לכל קטע (α,β) יש $x\in(\alpha,\beta)$ כך ש $\varphi'(x)>0$.

נחשב נגזרת

$$\varphi'(x)=\left(\frac{G(x)}{F(x)}\right)'=\frac{G'(x)F(x)-G(x)F'(x)}{F^2(x)}$$

$$= \frac{x f(x) \int_0^x f(t)\,dt - f(x) \int_0^x t f(t)\,dt}{F^2(x)} =$$

$$= \frac{f(x)}{F^2(x)} \int_0^x (x-t) f(t)\,dt$$

לכל $t \in [0,x]$ מתקיים $x-t \geq 0$

ולכל $t \in [0,\frac{x}{2}]$ מתקיים $x-t \geq \frac{x}{2}$

לכן $\int_0^x (x-t) f(t)\,dt \geq \int_0^{x/2} (x-t) f(t)\,dt \geq \frac{x}{2} \int_0^{x/2} f(t)\,dt > 0$

לכל $x>0$.

ומכאן $\varphi'(x) \geq 0$ לכל $x>0$ כי $f(x) \geq 0$ לכל x

ו- $\varphi'(x) > 0$ לכל $x>0$ רציונלי כי $f(x) > 0$ לכל $x \in Q$

ולכן $\varphi(x)$ עולה ממש חסר.

כעת נחשב $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x)$ באמצעות כלל לופיטל.

כל התנאים של משפט לופיטל מתקיימים

$F(x)$, $G(x)$ גזירות לכל $x>0$ $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = F(0) = 0$!

$$\lim_{x \to 0^+} G(x) = G(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{G'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x f(x)}{f(x)} = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

ומכאן $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = 0$

<u>שאלה 2</u> נתבונן בפונקציה $f(x)=\sin\pi\sqrt{x}$ בקטע $[0,1]$.
זאת פונקציה רציפה ולכן אינטגרבילית בקטע.
ניקח חלוקה של קטע $[0,1]$ ל n קטעים שווים וניקח $\xi_i=\frac{i}{n}$ לכל $i=1,\dots,n$. אזי $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$ זו סכום אינטגרלי של רימן, לכן

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\int_0^1 \sin\pi\sqrt{x}\,dx=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{x}=t\\ x=t^2\\ dx=2t\,dt\end{array}\right\}=2\int_0^1 t\sin\pi t\,dt=$$

$$=-2\int_0^1 t\,d\left(\frac{\cos\pi t}{\pi}\right)dt=-\frac{2}{\pi}t\cdot\cos\pi t\Big|_0^1+\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos\pi t\,dt=$$

$$=-\frac{2}{\pi}t\cos\pi t\Big|_0^1+\frac{2}{\pi}\frac{\sin\pi t}{\pi}\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}+0+0=\frac{2}{\pi}$$

<u>שאלה 3</u> בקטע $[1,2]$ הפונקציה $f(x)=\frac{x^3+2}{x^3+x^2}$ חיובית
לכן $S=\int_1^2 f(x)\,dx$.
(א)

$$\frac{x^3+2}{x^3+x^2}=1+\frac{2-x^2}{x^2(x+1)}=1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$$

$$A=-2;\quad B=2;\quad C=1$$

$$S=\int_1^2 1\,dx+\int_1^2-\frac{2}{x}\,dx+\int_1^2\frac{2}{x^2}\,dx+\int_1^2\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$=x\Big|_1^2-2\ln|x|\Big|_1^2-\frac{2}{x}\Big|_1^2+\ln|x+1|\Big|_1^2=2-\ln\left(\frac{8}{3}\right)$$

(ב) $\ell = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$ אורך עקומה

בשביל עקומה הראשונה Γ_1

$$x'(t)=f(t)-f'(t) \; ; \quad y'(t)=f(t)+f'(t)$$

$$[x'(t)]^2+[y'(t)]^2 = 2\left(f^2(t)+(f'(t))^2\right) \qquad (*)$$

בשביל עקומה שנייה Γ_2

$$x'(t) = f'(t)(\sin t-\cos t)+f(t)(\cos t+\sin t)$$

$$y'(t) = f'(t)(\sin t+\cos t)+f(t)(\cos t-\sin t)$$

$$[x'(t)]^2+[y'(t)]^2 = 2\left(f^2(t)+(f'(t))^2\right) \quad (**)=(*)$$

לכן אורך של עקומה הראשונה מאשר שווה לאורך של עקומה שנייה בכל קטע $[a,b]$.