אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

מס' הנבחן: ____________

תאריך הבחינה : 22.07.2007
שם המורה : גולדשטיין, גורביץ', ליידרמן
מבחן ב : חדו"א א2
מס' הקורס : 201-1-0021
מיועד לתלמידי : מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה : א' , סמ' : ב', מועד : א'
משך הבחינה : 3 שעות
חומר עזר : דף נוסחאות אחד (2 עמודים) בגודל סטנדרטי, מחשב כיס פשוט עם צג קטן

ענו על 5 השאלות מתוך 6.
כל שאלה שווה 20 נקודות.

כל התשובות חייבות להיות מלאות ומנומקות היטב.

השאלות:

1. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה על הקטע $[0,1]$. הוכח ש - $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(\sqrt[n]{x})\,dx = f(1)$.

2. תהי מוגדרת הפונקציה $f(x)=\int_0^x |\sin t|\,dt$. הראה כי האינטגרל הלא-אמיתי $\int_1^\infty \frac{\sin x}{f(x)}\,dx$ מתכנס בתנאי.

3. נניח שנתונה עקומה במערכת פולרית (r,φ), כאשר $r\in[a,b]$ (r הוא רדיוס פולרי)
וזווית פולרית φ מוגדרת כפונקציה של רדיוס r : $\varphi=\varphi(r)$; פונקציה $\varphi(r)$ גזירה ברציפות .

א. מצא את הנוסחה לחישוב אורך עקומה שמוגדרת באופן כזה.

ב. תשתמש בנוסחה שמצאת כדי לחשב את האורך של העקומה: $\{(r,\varphi): r\in[1,3],\ \varphi(r)=\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})\}$.

4. הוכח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n})\frac{\sin(nx)}{n}$ מתכנס לכל x. חקור האם התכנסות בהחלט או בתנאי.

5. תהי מוגדרת הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשב את הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x}$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y}$ בנקודה $(0,0)$.

ב. האם הפונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$?

6. נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^3-2x+2xy^2$.

א. מצא את כל הנקודות של אקסטרמום מקומי של פונקציה $f(x,y)$.

ב. מצא את הערך הכי גדול ואת הערך הכי קטן של פונקציה $f(x,y)$ בחצי עגול $\{(x,y): x^2+y^2\le 1;\ y\ge 0\}$.

-בהצלחה-

פתרונות של מבחן בחדו"א א2 , מועד א' 2007

שאלה 1.

פונקציה $f(x)$ רציפה, לפי משפט על הערך הממוצע אינטגרלי קיימת נקודה $c_n \in [\frac{1}{n},1]$ כך ש-

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(\sqrt[n]{x})\,dx = (1-\frac{1}{n})f(\sqrt[n]{c_n}).$$

$\frac{1}{n} \le c_n \le 1$, לכן $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \le \sqrt[n]{c_n} \le 1$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, לכו גם $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n} = 1$ ולפי הרציפות של פונקציה $f(x)$ מקבלים ש- $\lim\limits_{n\to\infty} f(\sqrt[n]{c_n}) = f(1)$. ובכן

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(\sqrt[n]{x})\,dx = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})\lim_{n\to\infty} f(\sqrt[n]{c_n}) = f(1)$$

שאלה 2.

נבדוק את התנאים של מבחן דיריכלה.

פונקציה $f(x) = \int_0^x |\sin t|\,dt$ מונוטונית עולה כי $|\sin t| \ge 0$.

$\int_0^x |\sin t|\,dt \underset{x\to\infty}{\to} \infty$ כי $\int_0^{n\pi} |\sin t|\,dt = \sum_{i=1}^{n}\int_{(i-1)\pi}^{i\pi}|\sin t|\,dt = 2n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$

לכן $\frac{1}{f(x)} \underset{x\to\infty}{\to} 0^+$ פונקציה יורדת מונוטונית. פונקציה קדומה של $\sin x$ חסומה ולכן

אינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sin x}{f(x)}dx$ מתכנס לפי מבחן דיריכלה.

נוכיח עכשיו שאינטגרל $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{f(x)}dx$ מתבדר.

לכל $n\pi \le x \le (n+1)\pi$ מתקיים ש- $2n \le f(x) = \int_0^x |\sin t|\,dt \le 2(n+1)$

לכן $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x+\pi} \le \frac{1}{2(n+1)} \le \frac{1}{f(x)} \le \frac{1}{2n} \le \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x-\pi}$.

מכאן $(x\to\infty)$ $\frac{1}{f(x)} \sim \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x}$ ולכן $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{f(x)}dx \sim \int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$.

אינטגרל $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$ מתבדר ולכן לפי מבחן ההשוואה גם אינטגרל $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{f(x)}dx$ מתבדר.

שאלה 3.

(א) העקומה מוגדרת בצורה פרמטרית $\begin{cases} x(r) = r\cos(\varphi(r)) \\ y(r) = r\sin(\varphi(r)) \end{cases}$, כאשר $a \le r \le b$.

הנוסחה הכללית של אורך העקומה היא $l = \int_a^b \sqrt{[x'(r)]^2 + [y'(r)]^2}\,dr$

$$x'(r)=\cos(\varphi(r))+r(-\sin\varphi(r)))\varphi'(r))$$
$$y'(r)=\sin(\varphi(r))+r(-\cos\varphi(r)))\varphi'(r))$$

$$[x'(r)]^2+[y'(r)]^2=1+r^2[\varphi'(r)]^2$$

לכן הנוסחה של אורך העקומה בשאלה היא $l=\int_a^b\sqrt{1+r^2[\varphi'(r)]^2}\,dr$

(ב) אם $\varphi(r)=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$ אז

$$l=\int_1^3\sqrt{1+r^2\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\right)^2}dr=\frac{1}{2}\int_1^3\sqrt{r^2+2+\frac{1}{r^2}}dr=\frac{1}{2}\int_1^3\left(r+\frac{1}{r}\right)dr=2+\frac{1}{2}\ln 3$$

<u>שאלה 4.</u>

נציין שאסור מיד להשתמש במבחן אבל כי סכומים $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ לא חסומים.

נבדוק את התנאים של מבחן דיריכלה.

נסמן $a_n=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})\frac{1}{n}$, $b_n=\sin(nx)$

לכל x קבוע סכומים חלקיים של טור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ חסומים.

נוכיח שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת ל- 0.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\le 1+\int_1^n\frac{1}{x}dx=1+\ln(n),$$

לכן $a_n\le\frac{1+\ln(n)}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

מונוטוניות: $a_n=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})\frac{1}{n} > (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})\frac{1}{n+1}=a_{n+1}$

כי אי-שוויון הזה שקול ל- $(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})(n+1) > (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})\,n$

וזה שקול ל- $\frac{n}{n+1} < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ שכמובן נכון.

בהחלט טור מתכנס אם ורק אם $\sin(nx)$ =0, זאת אומרת $x=\pi k$.

הסיבה: לכל $x\neq\pi k$ טור $\frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(nx)}{n} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n}$ מתבדר.

<u>שאלה 5.</u>

(א) $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=$ באופן דומה $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

(**ב**) נרשום תוספת שלמה $\Delta z = \dfrac{\sin(\Delta x^2 \Delta y^2)}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0\Delta x + 0\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

מפה $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \dfrac{\sin(\Delta x^2 \Delta y^2)}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

$|\sin t| \le |t|$, לכן

$$|\varepsilon(\Delta x, \Delta y)| \le \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{|\Delta x \Delta y|}{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)^{\frac{3}{2}} |\Delta x \Delta y|^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} |\Delta x \Delta y|^{\frac{1}{2}}$$

מכאן נובע מיד ש- $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) \to 0$ כאשר $\Delta x, \Delta y \to 0$, ז"א
פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

שאלה 6.

(**א**) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 2 + 2y^2 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4xy = 0$

אם $x = 0$ אז $y = \pm 1$, מקבלים 2 נקודות סטציונריות $M_{1,2} = (0, \pm 1)$

אם $y = 0$ אז $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, מקבלים עוד 2 נקודות סטציונריות $M_{3,4} = (\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4y$, $\Delta = 24x^2 - 16y^2$

בנקודות $M_{1,2}$ מתקיים ש- $\Delta < 0$ ולכן $M_{1,2}$ הן נקודות אוכף.

בנקודות $M_{3,4}$ מתקיים ש- $\Delta > 0$ ולכן $M_{3,4}$ הן נקודות קיצון:

$M_3(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$ היא נקודת מקסימום מקומי, $M_4(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$ היא נקודת מינימום מקומי.

(**ב**) בתחום נמצאות נקודת קיצון $M_{3,4}$ שתיהן. $f(M_3) = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx -1.1$, $f(M_4) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 1.1$

נחקור בקטע $x \in [-1, 1], y = 0$. $g(x) = x^3 - 2x$.

$g'(x) = 3x^2 - 2 = 0$ מביא לאותן נקודות $M_{3,4}$. בקצוות $g(-1) = 1, g(1) = -1$.

נחקור בחצי מעגל $x \in [-1, 1]$, $y = \sqrt{1 - x^2}$. $g(x) = x^3 - 2x + 2x(1 - x^2) = -x^3$.

התשובה: ערך הכי גדול בתחום $f(M_4) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 1.1$

ערך הכי קטן בתחום $f(M_3) = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx -1.1$