אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

מס' הנבחן:______________

תאריך הבחינה : 31.07.2006
שם המורה : גולדשטיין, לוין, ליידרמן
מבחן ב : חדו"א א2
מס' הקורס : 201-1-0021
מיועד לתלמידי: מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה : א' , סמ' : ב', מועד : ב'
משך הבחינה : 3 שעות
חומר עזר : דף נוסחאות אחד (בגודל סטנדרטי)
מחשבון פשוט

כל התשובות חייבות להיות מלאות ומנומקות היטב.
כל התשובות חייבות יבדקו על-ידי הבודק.
ניקוד הסופי יתבצע לפי 5 תשובות הטבות ביותר.

1. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה לכל $x \in R$. יהי T מספר ממשי חיובי כך ש-

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$ לכל $x \in R$.

הראה כי $f(x+T) = f(x)$ לכל $x \in R$.

2. נתונה העקומה (ציקלוידה) בצורה פרמטרית : $\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}, a > 0, 0 \le t \le 2\pi$

א. מצא את האורך של ציקלוידה.

ב. נסמן ב- G תחום שחסום ע"י ציקלוידה וציר x . מצא את הנפח גוף הסיבוב של תחום G סביב ציר x .

3. נתון האינטגרל הלא-אמיתי $\int_2^\infty \frac{\sin x}{x + 2\cos x} dx$.

קבע האם האינטגרל מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר. תן הוכחה לתשובתך.

4. נתון טור החזקות $\sum_{n=2}^\infty \frac{\sin(1/n)}{\ln n} x^n$

א. מצא את הרדיוס התכנסות של הטור.

ב. חקור את ההתכנסות בקצוות.

5. הפונקציה $f(x,y)$ מוגדרת בתחום $x^2 + y^2 < 1$ ע"י

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2+y^2)^\alpha}{\ln(x^2+y^2)}, (x,y) \ne (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

א. מצא את כל הערכים של α כך שפונקציה $f(x,y)$ רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. מצא את כל הערכים של α כך שפונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$

6. נתונה פונקציה $f(x,y) = 3x^{2/3} + 3y^{2/3} - x^2 - y^2$

א. מצא את הנקודות האקסטרמום המקומי של $f(x,y)$

ב. מצא את הערך הגדול היותר ו את הערך הקטן היותר של $f(x,y)$ בעיגול $G = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$

-בהצלחה-

<u>פתרונון של המבחן מועד ב' 2006</u>

<u>שאלה 1</u>

נגדיר את פונקצית העזר: $g(x)=\int\limits_{x}^{x+T} f(t)dt$

$g(x)=const$ ערך קבוע לכל x כי ערך $\int\limits_{0}^{T} f(t)dt$ לא תלוי ב- x. מצד שני מותר להשתמש בנוסחת נוימן-לייבניץ כי $f(t)$ רציפה. ובכן

$g'(x)=f(x+T)-f(x)=(const)'=0$ לכל $x\in R$

ז"א $f(x+T)=f(x)$ לכל $x\in R$

<u>שאלה 2</u>

$$a>0, 0\le t\le 2\pi, \begin{cases} x(t)=a(t-\sin t) \\ y(t)=a(1-\cos t)\end{cases}$$

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$$

א. $$l=a\int\limits_{0}^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}dt=a\int\limits_{0}^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t}dt=a\sqrt{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}dt=$$

$$=2a\int\limits_{0}^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=2a\int\limits_{0}^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-2a\cdot\cos\frac{t}{2}\cdot 2\Big|_{0}^{2\pi}=8a$$

ב.

$$V=\pi\int\limits_{a}^{b}y^2(x)dx=\pi\int\limits_{0}^{2\pi}y^2(t)x'(t)dt=\pi\int\limits_{0}^{2\pi}a^3(1-\cos t)^3dt=a^3\pi\int\limits_{0}^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt=$$

$$=a^3\pi\left[t\Big|_{0}^{2\pi}-3\sin t\Big|_{0}^{2\pi}+3\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt-\int\limits_{0}^{2\pi}(1-\sin^2 t)d\sin t\right]=a^3\pi[2\pi+3\pi]=5a^3\pi^2$$

<u>שאלה 3</u>

$|\cos x|\le 1$ לכן $|x+2\cos x|\sim|x|, x\to\infty$

אינטגרלים $\int\limits_{2}^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x+2\cos x}\right|dx$ ו $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ שקולים ולכן אינטגרל $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{\sin x}{x+2\cos x}dx$ מתבדר בהחלט.

נחקור את ההתכנסות בתנאי:

$$\frac{\sin x}{x+2\cos x}=\frac{\sin x}{x}+\left(\frac{\sin x}{x+2\cos x}-\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin 2x}{x(x+2\cos x)}$$

אינטגרל $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ מתכנס בתנאי לפי מבחן דיריכלה. אינטגרל $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x(x+2\cos x)}dx$ מתכנס בהחלט לפי מבחני השוואה

משום ש – $|\sin 2x| \le 1$ ו – $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}dx$ מתכנס. לכן $\int_2^\infty \frac{\sin 2x}{x(x+2\cos x)}dx$ $\int_2^\infty \frac{\sin x}{x+2\cos x}dx = \int_2^\infty \frac{\sin x}{x}dx - $ גם מתכנס <u>בתנאי.</u>

<u>שאלה 4</u>

א. $$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right|$$

נזכיר כי $t\to 0, \sin t \sim t$ לכן, $n\to\infty, \sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$. כמו כן $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/(x+1)}{1/x} = 1$ לפי כלל לופיטל.

לכן רדיוס התכנסות: $R=1$

ב. בקצה $x=1$ מקבלים טור חיובי מספרי $\sum_{n=2}^\infty \frac{\sin\frac{1}{n}}{\ln n}$ – הוא שקול לטור מספרי $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln n}$.

בעזרת מבחן אינטגרלי נראה שטור הזה מתבדר. נגדיר פונקצית עזר $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$, $x\ge 2$.

אזי: $f(x)\searrow 0, x\to\infty$ ו- $\int_2^\infty f(x)dx = \ln(\ln x)_2^\infty = \infty$.

ז"א אינטגרל מתבדר.לכן לפי מבחן השוואה גם טור $\sum_{n=2}^\infty \frac{\sin\frac{1}{n}}{\ln n}$ מתבדר.

בקצה $x=-1$ מקבלים טור עם סימנים מתחליפים $\sum_{n=2}^\infty \frac{\sin\frac{1}{n}}{\ln n}(-1)^n$

נראה שטור הזה מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

$\frac{\sin\frac{1}{n}}{\ln n} \sim \frac{1}{n\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ מונוטונית:

$$0<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\frac{\pi}{2}, \ln n < \ln(n+1) \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) < \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

ולכן $\frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\ln(n+1)} < \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln n}$ לכל n

<u>שאלה 5</u>

א. פונקציה מוגדרת בעיגול הפתוח $x^2+y^2<1$. היא רציפה בכל נקודה $(x,y)\ne(0,0)$ כי היא פונקציה אלמנטרית.
גם בנקודה $(0,0)$ היא רציפה לכל $\alpha>0$ משום ש-

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)^\alpha}{\ln(x^2+y^2)} = \left\{p=\sqrt{x^2+y^2}\right\} = \lim_{p\to 0}\frac{p^{2\alpha}}{\ln(p^2)} = \frac{0}{\infty} = 0 = f(0,0)$$

ב. נרשום את התוספת שלמה:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Delta y + \varepsilon(\Delta x,\Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^{2\alpha-1}}{\ln\left((\Delta x)^2\right)}=0$$

אם ורק אם $2\alpha-1\geq 0$, ז"א $\alpha\geq\frac{1}{2}$. אם $\alpha<\frac{1}{2}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\infty$ ז"א פונקציה **לא** דיפרנציאבילית.

מטעם סימטריה $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ אם ורק אם $\alpha\geq\frac{1}{2}$.

לכן $\Delta f=\frac{\left((\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right)}{\ln\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)}$ ולכן $\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=\frac{\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\ln\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)}$

$$\lim_{\Delta y,\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=\lim_{p\to 0}\frac{p^{2\alpha-1}}{\ln\left(p^2\right)}=0\Leftrightarrow\alpha\geq\frac{1}{2}$$

התשובה: פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$ אם ורק אם $\alpha\geq\frac{1}{2}$.

שאלה 6

קודם כל נציין את התכונות הסימטריה הבאות של $f(x,y)$

$$f(x,y)=f(y,x),\ f(-x,y)=f(x,y),\ f(x,-y)=f(x,y)$$

א. $$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}2x^{-1/3}-2x, & x\neq 0\\ not\quad exist, & x=0\end{cases}$$

$$2x^{-1/3}-2x=0,\ x\neq 0\Leftrightarrow x^{2/3}=1\Leftrightarrow x=\pm 1$$

לפי תכונות הסימטריה של $f(x,y)$ מקבלים שהנקודות החשודות של $f(x,y)$ הן: $(0,0),(0,\pm 1),(\pm 1,0),(\pm 1,1),(1,\pm 1)$

נחקור את הנקודות האלה:

$(1,1)$

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2}=-\frac{2}{3}x^{-4/3}-2\Big|_{x=1}=-\frac{8}{3},-\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2}=-\frac{8}{3}$$

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x\partial y}=0,-\Delta=\left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)-0>0,-\left(-\frac{8}{3}\right)<0$$

לפי מבחן הנגזרת מסדר 2 ל $f(x,y)$ יש <u>מקסימום מקומי ב-</u> $(1,1)$

$(0,0)$

הנגזרות החלקיות לא קיימות ב- $(0,0)$ לכן לא ניתן להשתמש במבחן הנגזרות מסדר 2. נצג את $f(x,y)$ בצורה:

$$f(x,y)=3x^{2/3}\left(1-\frac{1}{3}x^{4/3}\right)+3y^{2/3}\left(1-\frac{1}{3}y^{4/3}\right)$$

מההצגה הזאת ברור ש: $f(x,y)>0=f(0,0)$ כאשר $(x,y)\neq(0,0)$ ו- $|y|<1,|x<1|$

לכן ל- $f(x,y)$ יש <u>מינימום מקומי ב-</u> $(0,0)$

$(1,0)$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ לא קיימת ב- $(1,0)$ לכן לא ניתן להשתמש במבחן הנגזרות מסדר 2.

נחקור את ההתנהגות של $f(x,y)$ לאורך הישרים $x=1$ ו- $y=0$

$$f(x,y)=2+3y^{2/3}-y^2=2+3y^{2/3}\left(1-\frac{1}{3}y^{4/3}\right)$$

ברור ש- $f(1,0)=2<f(1,y)$ כאשר $y\neq 0$ ו- $|y|<1$

$$f(x,0)=3x^{2/3}-x^2$$

$$\left.\frac{d}{dx}f(x,0)\right|_{x=1}=\left.2x^{-1/3}-2x\right|_{x=1}=0$$

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}f(x,0)\right|_{x=1}=\left.-\frac{2}{3}x^{-4/3}-2\right|_{x=1}=-\frac{8}{3}<0$$

לפי הנגזרת השנייה עבור פונקציות של משתנה אחד ל - $f(x,0)$ יש מקסימום מקומי ב- $x=1$

כך ל- $f(x,y)$ יש בנקודה $(1,0)$ מינימום מקומי לאורך הישר $y=0$ ו מקסימום מקומי לאורך הישר $x=1$

לכן ל- $f(x,y)$ אין אקסטרמום מקומי ב- $(1,0)$ ($(1,0)$ נקודת אוכף).

לפי שיקולי הסימטריה

הנקודות $(\pm1,-1),(-1,1)$ דומות ל $(1,1)$, ז"א מקסימום ונקודות $(0,\pm1),(-1,0)$ דומות ל - $(1,0)$, ז"א אין אקסטרמום.

ב. נציג את השפה של העיגול בצורה פרמטרית: $x=\cos t, y=\sin t$

משיקולי הסימטריה ניתן להניח ש- $0\le t\le\frac{\pi}{2}$

$$g(t)=f(x(t),y(t))=3\cos^{2/3}t+3\sin^{2/3}t-1$$

ועבור $0<t<\frac{\pi}{2}$

$$g'(t)=2\cos^{-2/3}t(-\sin t)+2\sin^{-1/3}t\cos t=0$$

$$\tan^{-1/3}t=\tan t\Rightarrow\tan t=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$$

$$x\left(\frac{\pi}{4}\right)=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},g\left(\frac{\pi}{4}\right)\approx 3.77$$

$$x(0)=1,y(0)=0,g(0)=2$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,g\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$$

בתוך העיגול נמצאת רק נקודות האקסטרמום המקומי $(0,0)$ ו- $f(0,0)=0$ לכן בעיגול $x^2+y^2\le 1$

$\max f\approx 3.77$ בנקודה $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ וגם בנקודות $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ו- $\min f=0$ בנקודה $(0,0)$.