אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

מס' הנבחן:______________

תאריך הבחינה: 09.07.2006
שם המורה: גולדשטיין, לוין, ליידרמן
מבחן ב: חדו"א א2
מס' הקורס: 201-1-0021
מיועד לתלמידי: מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה: א', סמ': ב', מועד: א'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: דף נוסחאות אחד (בגודל סטנדרטי)

כל התשובות חייבות להיות מלאות ומנומקות היטב.
כל התשובות חייבות יבדקו על-ידי הבודק.
ניקוד הסופי יתבצע לפי 5 תשובות הטבות ביותר.

1. ע"י שימוש בסכומי רימן הראה ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{(2n)!}{n!}\right]^{1/n}=e^{\int_1^2 \ln x\,dx}$

2. יהי G התחום במישור שחסום ע"י העקומות $x=y^{3/2}, y\ge 0, y=x^{3/2}, x\ge 0$

א. מצא את העורך השפה של G

ב. מצא את הנפח גוף הסיבוב של תחום G סביב ציר x

3. נתון האינטגרל הלא-אמיתי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(\pi-x)}dx$.

קבע האם האינטגרל מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר. תן הוכחה לתשובתך.

4.

א. הראה כי סכום הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln n)^x}$ הוא פונקציה רציפה בתחום $[0,\infty)$

ב. הראה כי סכום הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^x}$ הוא פונקציה רציפה בתחום $[1,\infty)$

ג. האם הטור בסעיף ב. מתכנס במידה שווה בתחום $(1,\infty)$? נמק את תשובתך.

5. הפונקציה $f(x,y)$ מוגדרת בתחום $G=\{(x,y):-1<x<1,-1<y<1\}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\ln(1+x)\ln(1+y)\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 y}{\sin^2 x+\sin^2 y},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

מצא את כל הנקודות (x,y) בתחום G עבורן הנגזרות המעורבות מסדר 2 קימות ו $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

6. נתונה פונקציה $x\neq 0, y\neq 0, f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{8}xy+\frac{1}{y}$

א. מצא את הנקודות האקסטרמום המקומי של $f(x,y)$

ב. מצא את הערך הגדול היותר ו את הערך הקטן היותר של $f(x,y)$ בתחום $G=\{(x,y):0<x\le 4, 0<y\le 4, xy\ge 1\}$

-בהצלחה-

פתרונון של המבחן מועד א' 2006

שאלה 1

$\ln x$ רציפה ב $[1,2]$ ולכן אינטגרבילית ב- $[1,2]$ אז:

$$\int_1^2 \ln x dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\ln\frac{(n+1)(n+2)...(n+n)}{n\cdot n\cdot .....\cdot n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\frac{(2n)!}{n!\cdot n^n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{1}{n}\left[\frac{(2n)!}{n!}\right]^{1/n}\right)$$

זה גורר ש-

$$e^{\int_1^2 \ln x dx} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\left[\frac{(2n)!}{n!}\right]^{1/n}\right)} == \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\frac{1}{n}\left[\frac{(2n)!}{n!}\right]^{1/n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{(2n)!}{n!}\right]^{1/n}$$

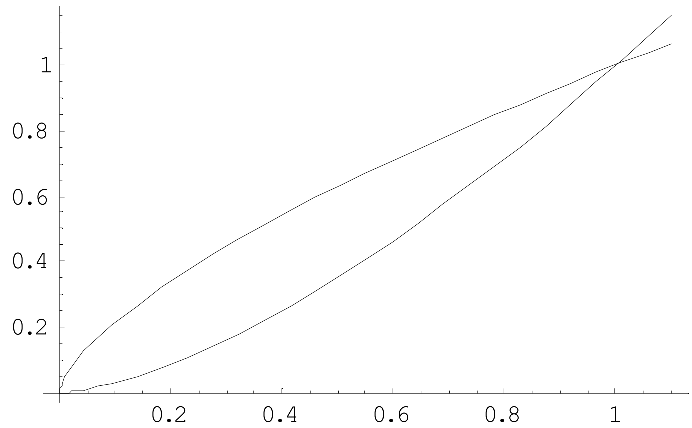
(כאן משתמשים ברציפות של e^t)

שאלה 2

יהי G התחום במישור שחסום ע"י העקומות $x=y^{3/2}, y\ge 0, y=x^{3/2}, x\ge 0$

א. נקודות החיתוך בין עקומים $x=y^{3/2}, y=x^{3/2}$ -הם הפתרונות של מערכת משוואות :

$$\begin{cases} x=y^{3/2} \\ y=x^{3/2}\end{cases} \Rightarrow x^{3/2}=x^{2/3}, x^{3/2}-x^{2/3}=0, x^{2/3}(x^{1/6}-1)=0$$



פתרונות: $\begin{pmatrix} x=1 \\ y=1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x=0 \\ y=0\end{pmatrix}$

אורך השפה:

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx+\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}y}dy = 2\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx = \left(2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\right)\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^1 = \frac{16}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}-1\right)$$

ב. $$V=\pi\int_0^1\left[\left(x^{2/3}\right)^2-\left(x^{3/2}\right)^2\right]dx = \pi\left(\int_0^1\left(x^{4/3}\right)dx-\int_0^1\left(x^3\right)dx\right) = \pi\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{4}\right)=\frac{5\pi}{28}$$

שאלה 3

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(\pi-x)}dx = \int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x(\pi-x)}dx+\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{x(\pi-x)}dx+\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x(\pi-x)}dx$$

$\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x(\pi-x)}dx$ מתכנס בהחלט כי $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(\pi-x)}=\frac{1}{\pi}$ ו

$\frac{|\sin x|}{|x(\pi-x)|}\le\frac{1}{|x(\pi-x)|}$ לכל x, $\frac{1}{|x(\pi-x)|}\sim\frac{1}{x^2}, x\to\pm\infty$

אינטגרל $\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{x^2}dx$ מתכנס ($a<0$ קבוע) ואזי לפי אינטגרל $\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{x(\pi-x)}dx$ מתכנס ללא שום בעיה כי

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(\pi-x)}=\frac{1}{\pi},\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x(\pi-x)}=\frac{1}{\pi}$$

אינטגרל $\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x(\pi-x)}dx$ מתכנס לפי מבחני השוואה באופן דומה כמו בתחום $(-\infty,0]$ ובכן אינטגרל

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(\pi-x)}dx$ מתכנס <u>בהחלט.</u>

<u>שאלה 4</u>

א. נוכיח שטור של פונקציות רציפות $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln n)^x}$ מתכנס במידה שווה בתחום $[0,\infty)$ לכל $x\ge 0$ סדרה

$\left\{\frac{1}{n(\ln n)^x}\right\}_{n=1}^{\infty}$ יורדת מונוטונית ו - $\frac{1}{n(\ln n)^x}\le\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ $\forall x\in[0,\infty)$. לכן טור מקיים את התנאים של

מבחן לייבניץ. נסמן שטורית של הטור :

$R_n(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(\ln k)^x}$ אז $|R_n(x)|\le\frac{1}{n(\ln n)^x}$ ולכן $|R_n(x)|\le\frac{1}{n}$ $\forall x\in[0,\infty)$

$R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ במידה שווה בתחום $[0,\infty)$, לכן סכום של הטור פונקציה רציפה $[0,\infty)$

ב. נקבע $1<a$ כלשהו ונוכיח שטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^x}$ מתכנס במידה שווה בתחום $[a,\infty)$. נשתמש במשפט Weierstrass.

$$\forall x\in[0,\infty),\frac{1}{n(\ln n)^x}\le\frac{1}{n(\ln n)^a}$$

טור מספרי $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^a}$ מתכנס לפי מבחן אינטגרל י לכל $a>1$

$\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x\ln x)^a}dx=\int_{2}^{\infty}\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^a}$ מתכנס אם ורק אם $a>1$

לפי משפט Weierstrass טור מתכנס במידה שווה בתחום $[a,\infty)$

לכן סכום של הטור הוא פונקציה רציפה לכל $1<a<x$, משום ש - $a>1$ שרירותי אזי פונקציה רציפה לכל $1<x$

ג. אם טור של פונקציה רציפות מתכנס במידה שווה בתחום $(1,\infty)$ אזי לפי קריטריון קושי טור מתכנס בקצה של תחום :

$x=1$. אבל עבור $x=1$ מקבלים טור מספרי $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)}$ שמתבדר לפי מבחן אינטגרלי.

לכן טור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^x}$ לא מתכנס במידה שווה בתחום $(1,\infty)$.

<u>שאלה 5</u>

הפונקציה $f(x,y)$ מוגדרת בתחום $G=\{(x,y):-1<x<1,-1<y<1\}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\ln(1+x)\ln(1+y)\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 y}{\sin^2 x+\sin^2 y},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

פונקציות $\ln(1+x),\ln(1+y),\sin^2 x,\sin^2 y$ גזירות אינסוף פעמים וכל הנגזרות רציפות לכל $(x,y)\neq(0,0)$,
$\sin^2 x+\sin^2 y>0$ אז עבור $(x,y)\neq(0,0)$ הפונקציה $f(x,y)$ גזירה אינסוף פעמים וכל הנגזרות חלקיות של כל סדר רציפות. לפי המשפט לגבי שיוון של נגזרות המעורבות $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ לכל $(x,y)\neq(0,0)$

<u>חישוב הנגזרות המערבות עבור</u> $(x,y)=(0,0)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{1+x}\ln(1+y)\frac{\sin^2 x-\sin^2 y}{\sin^2 x+\sin^2 y}+\ln(1+x)\ln(1+y)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin^2 x-\sin^2 y}{\sin^2 x+\sin^2 y}\right)$$ עבור $(x,y)\neq(0,0)$,

אזי עבור $x\neq 0$

$$\frac{\partial f(0,y)}{\partial x}=-\ln(1+y)$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

אז $\dfrac{\partial f(0,y)}{\partial x}=-\ln(1+y)$ לכל $-1<y<1$ ו

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}=\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{\partial f(0,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}}{y}=-\frac{d\ln(1+y)}{dy}(0)=-1$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{1}{1+y}\ln(1+x)\frac{\sin^2 x-\sin^2 y}{\sin^2 x+\sin^2 y}+\ln(1+x)\ln(1+y)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin^2 x-\sin^2 y}{\sin^2 x+\sin^2 y}\right)$$ עבור $(x,y)\neq(0,0)$,

אזי עבור $x\neq 0$

$$\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}=\ln(1+x)$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$

אז $\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial y}=\ln(1+y)$ לכל $-1<x<1$ ו

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial y}-\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}}{x}=\frac{d\ln(1+x)}{dx}(0)=1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$$

<u>שאלה 6</u>

(א) על מנת למצוא את הנקודות החשודות לאקסטרמום נפתור את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{y}{8} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{8} - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} = \frac{x^4}{8^2} = \frac{x}{8} \end{cases} \Rightarrow x^4 - 8x = 0 \Rightarrow x(x^3-8) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

$x = 0$ לא שייכת לתחום הגדרה, לכן הנקודה החשובה היחידה היא: $(x = 2, y = 2)$

נבדוק את התנאים המספיקים:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3}; \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3}; \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{1}{8}$$

בנקודה $M_0(2,2)$ מטריצה היא $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$. $\Delta > 0$, $A > 0$,

לכן נקודה $M_0(2,2)$ היא נקודת מינימום מקומי.

(ב) תחום G חסום על ידי שני קטעים והיפרבולה מלמטה.נקודה $M_0(2,2)$ שייכת לתחום G. $f(2,2) = \frac{3}{2} = 1.5$.

נחקור את הערכים של $f(x,y)$ על השפה של תחום G.

(I) $x = 4, \quad y \in \left[\frac{1}{4}, 4\right]$

$$g(y) = f(4,y) = \frac{1}{4} + \frac{y}{2} + \frac{1}{y}$$

$$g'(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{y^2} = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

$y = -\sqrt{2}$ לא נמצא בתחום הגדרה.

$$g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \frac{1}{4} \approx 1.66$$

בקצוות:

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = 4\frac{3}{8}, \quad g(4) = 2\frac{1}{2}$$

(II) $x \in \left[\frac{1}{4}, 4\right]$ $y = 4,$. באופן סימטרי.

$$g(x) = \frac{1}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \frac{1}{2} \approx 1.66; \quad g\left(\frac{1}{4}\right) = 4\frac{3}{8}; \quad g(4) = 2\frac{1}{2}$$

(III) , $x \in \left[\frac{1}{4}, 4\right]$, $y = \frac{1}{x}$ נרשום פונקציה

$$\varphi(x) = f\left(x, \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{8} + x$$

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

רק $x=1$ שייכת לתחום.

$$\varphi(1)=2\frac{1}{8};\quad \varphi(4)=\varphi\left(\frac{1}{4}\right)=4\frac{3}{8}$$

לכן ערך הכי גדול של $f(x,y)$ בתחום G הוא $4\frac{3}{8}$: $\quad f\left(4,\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4},4\right)=4\frac{3}{8}$

ערך הכי קטן של $f(x,y)$ בתחום G הוא: $f(2,2)=\frac{3}{2}$