אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

מס' הנבחן:______________

תאריך הבחינה: 03.07.2005
שם המורה: גולדשטיין, לוין, ליידרמן
מבחן ב: חדו"א א2
מס' הקורס: 201-1-0021
מיועד לתלמידי: מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה: א', סמ': ב', מועד: א'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: דף נוסחאות אחד (בגודל סטנדרטי)

כל התשובות חייבות להיות מלאות ומנומקות היטב.
כל התשובות חייבות יבדקו על-ידי הבודק.
ניקוד הסופי יתבצע לפי 5 תשובות הטבות ביותר.

1. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה על $[0,1]$ ו $f(x)\geq 0$ לכל $x\in[0,1]$. הראה כי קיים גבול סופי

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left[f(x)\right]^n dx$$

אם ורק אם $f(x)\leq 1$ לכל $x\in[0,1]$

2. יהי $a_n=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$

מצא את הרדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ וחקור את ההתכנסות בקצוות.

3. חקרו את הדיפרנציאביליות של הפונקציה $f(x)=\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)^3$. בנקודה $(0,0)$

4. חקרו את ההתכנסות של האינטגרל הלא-אמיתי

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\cos x}\sin(\tan x)dx$$

5. מצא את הנפח של הגוף

$$D=\left\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\leq 1, z\geq\sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

(רמז: D כגוף סיבוב של תחום מישורי)

6. הוכח את האי-שיוון:

$x^2y+\frac{1}{2}y^3\leq x^2+y^2$ כאשר $x^2+y^2\leq\frac{3}{2}$

(רמז: הגדר פונקצית עזר המתאימה ומצא את ערכה הגדול ביותר בתחום $x^2+y^2\leq\frac{3}{2}$)

-בהצלחה-

פתרון של המבחן מועד א' 2005

שאלה 1

נניח ש $f(x) \le 1$ לכל $x \in [0,1]$. אז לכל n ו לכל $x \in [0,1]$

$$0 \le [f(x)]^{n+1} \le [f(x)]^n \le 1$$

לפי כך הסדרה $\left\{\int_0^1 [f(x)]^n\, dx\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת.

נניח שקיים $0 \le a \le 1$ כך ש- $f(a) > 1$ לפי הרציפות של $f(x)$ אפשר להניח ש $0 < a < 1$ אז עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}(f(a) - 1)$ קיים $\delta > 0$ כך ש- $0 < a - \delta < a < a + \delta < 1$ ו $f(x) \ge 1 + \varepsilon$ לכל $a - \delta \le x \le a + \delta$. מזה נובע ש-

$$\int_0^1 [f(x)]^n dx \ge \int_{a-\delta}^{a+\delta} [f(x)]^n\, dx \ge \int_{a-\delta}^{a+\delta} [1+\varepsilon]^n\, dx = [1+\varepsilon]^n\,(2\delta)$$

לכן $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 [f(x)]^n dx = \infty$

שאלה 2

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{(n+1)\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}$$

מפני ש- $1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n} \ge 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)} = 0$ לכן לפי מבחן דאלמבר רדיוס התכנסות שווה ל- $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$

<u>התכנסות בקצוות</u>

א. $x = 1$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \ge \frac{1}{1 + 1 + \ldots\ldots + 1} = \frac{1}{n}$$

לכן $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ מתבדר מפני ש- הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר

ב. $x = -1$

ברור שלכל n $a_{n+1} \le a_n$, מפני ש- $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \infty$ נקבל ש - $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

לכן לפי מבחן ליבניץ הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n (-1)^n$ מתכנס

שאלה 3

$$f'_x(0,0)=\frac{d}{dx}f(x,0)\Big|_{x=0}=\frac{d}{dx}x\Big|_{x=0}=1$$

$$f'_y(0,0)=\frac{d}{dy}f(0,y)\Big|_{y=0}=\frac{d}{dy}y\Big|_{y=0}=1$$

$$f(0,0)=0$$

את ה $f(x,y)$ בצורה:

$$f(x,y)=f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,y)+\varepsilon\rho=x+y+\varepsilon\rho$$

כאשר $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ אז עבור $\rho\neq 0$

$$\varepsilon=\frac{(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})^3-x-y}{\rho}=\frac{3\sqrt[3]{x^2y}+3\sqrt[3]{xy^2}}{\rho}$$

אם נניח ש- $x=y$ אז $\varepsilon==\frac{3\sqrt[3]{x^2x}+3\sqrt[3]{xx^2}}{\rho}=\frac{6x}{\sqrt{2}\,|x|}=\pm\frac{6}{\sqrt{2}}$

לכן ε אינו שואף ל-0 כאשר $\rho\to 0$. זה אומר ש- $f(x,y)$ לא דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$

שאלה 4

נסמן $f(t)=\sin t$; $g(t)=\frac{arctgt}{\sqrt{t^2+1}}$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{x}{\cos x}\sin(tgx)dx=\left\{\begin{matrix}\text{הצבה}\\ tgx=t\\ x=arctgt\\ dx=\frac{1}{1+t^2}dt\\ \frac{1}{\cos^2 x}=t^2+1\end{matrix}\right\}=\int_0^\infty \sin t\cdot\frac{arctgt}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

$g(t)$ מונוטונית יורדת ל -0 כי $\lim_{t\to\infty}\operatorname{arctgt}=\frac{\pi}{2}$, $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}=0$.

$g(t)$ מונוטונית יורדת החל מ t_0 מסוים כי

$$g'(t)=\frac{\frac{1}{1+t^2}\sqrt{1+t^2}-arctgt\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{t^2+1}=\frac{1-t\,arctgt}{\left(t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}<0$$

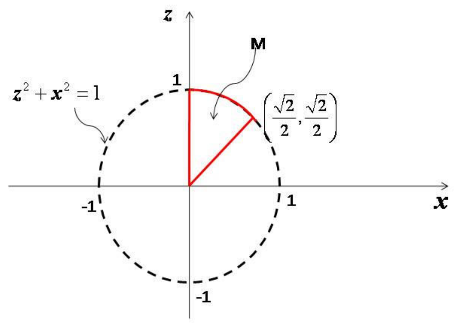
החל מ t_0 מסוים.

תנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן אינטגרל מתכנס. התכנסות היא בתנאי כי $\int_0^\infty\frac{|\sin t|}{t}dt\sim\int_0^\infty|\sin t|\frac{arctgt}{\sqrt{t^2+1}}dt$,

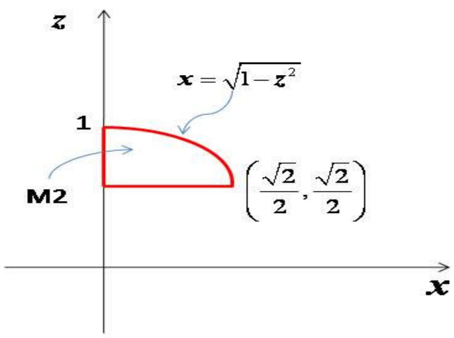
$\int_0^\infty\frac{|\sin t|}{t}dt$ מתבדר ולכן אינטגרל $\int_0^\infty|\sin t|\frac{arctgt}{\sqrt{t^2+1}}dt$ גם מתבדר לפי מבחן ההשוואה.

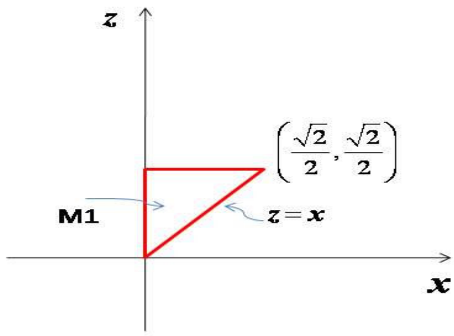
<u>שאלה 5</u>

את הגוף D ניתן לקבל את הגוף D כגוף הסיבוב של תחום מישורי M הבא סביב הציר $0z$



תחום M ניתן לפרק לשני תתי - תחומים





הנפח V_1 של גוף הסיבוב של M_1 סביב הציר $0z$

שווה ל- $V_1=\pi\int\limits_0^{\sqrt2/2} z^2dz=\pi\left.\frac{z^3}{3}\right|_0^{\sqrt2/2}=\pi\frac{\sqrt2}{12}$

הנפח V_2 של גוף הסיבוב של M_2 סביב הציר $0z$
שווה ל-

$$V_2=\pi\int\limits_{\sqrt2/2}^{1}\left(\sqrt{1-z^2}\right)^2dz=\pi\left.\left(z-\frac{z^3}{3}\right)\right|_{\sqrt2/2}^{1}=\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{5\sqrt2}{12}\right)$$

$$V=V_1+V_2=\pi\frac{\sqrt2}{12}+\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{5\sqrt2}{12}\right)=\pi\left(\frac{2-\sqrt2}{3}\right)$$

שאלה 6

נגדיר את פונקצית העזר $f(x,y)=x^2y+\frac12y^3-\left(x^2+y^2\right)$

ונמצא את הערך הכי גדול בתחום $x^2+y^2\le\frac32$.

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=2xy-2x=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=x^2+\frac32y^2-2y=0\end{cases}\Rightarrow\quad 1)\begin{cases}x=0\\ \frac32y^2-2y=0\end{cases}\quad;\quad \begin{matrix}x=0\\ y=0 \text{ או } y=\frac43\end{matrix}$$

$$2)x\ne0\Rightarrow y=1\quad,\quad x^2=\frac12$$

ובכן יש 4 נקודות חשודות, $M_1(0,0)$, $M_2\left(0,\frac43\right)$, $M_{3,4}\left(\pm\frac{1}{\sqrt2},1\right)$.

כולן נמצאות בתחום הסגור $x^2+y^2\le\frac32$ חוץ מנקודה M_2.

נחקור על השפה: $x^2=\frac32-y^2$, נקבל פונקציה: $g(y)=\left(\frac32-y^2\right)y+\frac12y^3-\frac32$, $y\in\left[-\sqrt{\frac32},\sqrt{\frac32}\right]$.

$$g(y)=-\frac12y^3+\frac32y-\frac32\quad;\quad g'(y)=-\frac32y^2+\frac32$$

$$g'(y)=0\Leftrightarrow y=\pm1$$

עכשיו נבחר את הערך הכי גדול:

$$g(1)=-\frac12\quad;\quad g(-1)=-\frac52$$

$$g\left(\sqrt{\frac32}\right)=\frac32\left(\sqrt{\frac38}-1\right)<0\quad;\quad g\left(-\sqrt{\frac32}\right)=-\frac32\left(\sqrt{\frac38}+1\right)\ ;\quad f\left(\pm\frac{1}{\sqrt2},1\right)=-\frac12;\quad f(0,0)=0$$

לכן $\max f(x,y)=0$, כאשר $x^2+y^2\le\frac32$

כלומר מתקיים ש- $x^2y+\frac12y^3\le x^2+y^2$ לכל $\{(x,y):x^2+y^2\le\frac32\}$.