אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

מס' הנבחן: ____________

ענו על 4 השאלות מתוך 5.
כל שאלה שווה 25 נקודות.
כל התשובות חייבות להיות מלאות ומנומקות היטב

תאריך הבחינה: 20.07.2004
שם המורה: גולדשטיין, לוין, ליידרמן
מבחן ב: חדו"א א2
מס' הקורס: 201-1-0021
מיועד לתלמידי: מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה: א', סמ': ב', מועד: ב'
משך הבחינה: 2.5 שעות
חומר עזר: דף נוסחאות אחד (2 עמודים)
מחשב כיס פשוט עם צג קטן

השאלות:

1. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה על $[0,1]$. הוכח ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)dx = f(0)$.

2. הראה כי האינטגרל הלא-אמיתי $\int_1^\infty [\ln(x+\sin x)-\ln(x)]dx$ מתכנס בתנאי.

3. חקור את ההתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^{n^2}$.

4. תהי מוגדרת פונקציה
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(\cos x-1)\sin^2 y}{\sin^4 x+(\ln(1+y))^4}, & (x,y)\in G,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases},$$
כאשר $G=\{(x,y): -\pi<x<\pi,\ y>-1\}$.

א. מצא את כל הנקודות שבהן $\frac{\partial f}{\partial x}$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y}$ קיימות.

ב. מצא את כל הנקודות $(x,y)\in G$ שבהן הפונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית.

5. נתונה הפונקציה $f(x,y)=\cos x+\cos y+\cos(x+y)$.

א. מצא את כל הנקודות של אקסטרמום מקומי של $f(x,y)$ שנמצאות בתחום
$$\{(x,y): -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\}$$

ב. מצא את הערך הכי גדול ואת הערך הכי קטן של $f(x,y)$ בתחום הזה.

- בהצלחה -

פתרונון של המבחן מועד ב' 2004

שאלה 1

<u>דרך ראשונה</u>

$x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ בתחום $[0,1)$, אבל לא במידה שווה, לכן נפרק את הקטע $[0,1)$ לשני קטעים.

ונקח $[0,1]=[0,a_n]\cup[a_n,1]$ $a_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

$\int_0^1 f(x^n)dx=\int_0^{a_n} f(x^n)dx+\int_{a_n}^1 f(x^n)dx$ לפי משפט "ערך הביניים" ($f(x)$ רציפה) קיימת נקודה $c_n\in[0,a_n]$

כך ש $\int_0^{a_n} f(x^n)dx=a_n f\left[(c_n)^n\right]$, $0\le(c_n)^n\le\frac{1}{n}$ לכל n, לכן לפי רציפות של פונקציה $f(x)$ בנקודה 0 מקבלים ש-

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{a^n} f(x^n)dx=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\lim\limits_{n\to\infty}f\left[(c_n)^n\right]=f(0)$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{a^n}^1 f(x^n)dx=0$ כי : $\left|\int_{a^n}^1 f(x^n)dx\right|\le M(1-a^n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ כאשר $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$

<u>סופית</u>: $\int_0^1 f(x^n)dx=\underbrace{\int_0^{a_n} f(x^n)dx}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)}+\underbrace{\int_{a_n}^1 f(x^n)dx}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}\to f(0)$

<u>דרך שניה</u>

$f(x^n)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)$ בתחום $[0,1)$, אבל לא במידה שווה, לכן נפרק את הקטע $[0,1)$ לשני קטעים.

נקבע $a\in(0,1)$ <u>שרירותי</u>. $[0,1]=[0,a]\cup[a,1]$

$x^n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ בתחום $[0,a]$ במידה שווה, לכן גם $f(x^n)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(0)$ בתחום $[0,a]$ במידה שווה

ואז לפי משפט שנלמד בקורס $\int_0^a f(x^n)dx\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_0^a f(0)dx=a\,f(0)$

נסמן $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$, אז $\left|\int_a^1 f(x^n)dx\right|\le M(1-a)$

$$\int_0^1 f(x^n)dx-f(0)=\int_0^a f(x^n)dx-a\,f(0)+\int_a^1 f(x^n)dx-(1-a)\,f(0)$$

לכן לכל n מתקיים ש-

$\left|\int_0^1 f(x^n)dx-f(0)\right|\le\left|\int_0^a f(x^n)dx-a\,f(0)\right|+(1-a)2M$ כאשר $0<a<1$ שרירותי.

לכן:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1 f(x^n)dx-f(0)\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^a f(x^n)dx-a\,f(0)\right|=0$$

שאלה 2

$$\ln(x+\sin x)-\ln x=\ln(\frac{x+\sin x}{x})=\ln(1+\frac{\sin x}{x})=\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin^2 x}{2x^2}+O\left(\frac{\sin^2 x}{2x^2}\right),x\to\infty$$

מפני ש- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ ו- $\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+O(t^2),t\to 0$ (נוסחת טיילור)

$\int_1^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ מתכנס לפי מבחן דיריכלה

$\int_1^\infty\frac{\sin^2 x}{2x^2}dx$ מתכנס לפי מבחן השוואה כ'

$0\le\sin^2 x\le 1$ ו - $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx$ מתכנס.

$\int_1^\infty O\left(\frac{\sin^2 x}{2x^2}\right)dx$ מתכנס לפי אותה סיבה

זה מוכיח ש- $\int_1^\infty\left|\ln(\frac{x+\sin x}{x})\right|dx$ מתבדר לפי מבחן השוואה כ'

$$\left|\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\right|\sim\left|\frac{\sin x}{x}\right|,x\to\infty$$

ו- $\int_1^\infty\frac{|\sin x|}{x}dx$ מתבדר.

שאלה 3

$\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{n}x^{n^2}=\sum_{i=1}^\infty a_i x^i$ כאשר: $a_i=\begin{cases}\frac{(-1)^n}{n} & ,i=n^2,n=1,2,...\\ 0,i\ne n^2\end{cases}$

$$c=\overline{\lim_{i\to\infty}}|a_i|^{\frac{1}{i}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|^{\frac{1}{n^2}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}=1$$

לכן רדיוס התכנסות $R=\frac{1}{c}=1$

התכנסות בקצוות: $x=-1$

$\sum_{i=1}^\infty\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^\infty\frac{(-1)^{n(1+n)}}{n}=\sum_{i=1}^\infty\frac{(-1)^{n+n^2}}{n}=\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{n}(-1)^{n^2}$ מפני ש $n(1+n)$ תמיד מספר זוגי

לכן הטור מתבדר ב - $x=-1$

$x=1$, $\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{n}1^{n^2}=\sum_{i=1}^\infty\frac{(-1)^n}{n}$

הטור מתכנס ב- $x=1$ לפי מבחן ליבניץ.

<u>שאלה 4</u>

$f(x,y)$ מוגדרת בתכום $G=\{(x,y):-\pi<x<\pi,\ y>-1\}$

בכל הנקודה $(x,y)\neq(0,0)$ פונקציה $f(x,y)$ -היא פונקציה אלמנטרית בסביבה של (x,y)

ולכן $f(x,y)$ דיפירנציאבילית בכל הנקודה $(x,y)\neq(0,0)$

צריך לחקור רק בנקודה $(0,0)$

א. $f(x,o)=0,\ f(0,0)=0\ ,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$

$$f(0,y)=0\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$

ובכן $\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial x}$ קיימות בכל נקודות של תכום G

ב. $f(x,y)$ לא דיפירנציאבילית ב- $(0,0)$ כי $f(x,y)$ אפילו לא רציפה ב- $(0,0)$

$$\cos x-1=-\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\sim-\frac{1}{2}x^2, x\to 0$$

$$\sin x\sim x, x\to 0; \ln(1+y)\sim y, y\to 0$$

ולכן $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ - גבול הזה לא קיים משום שגבולות בכיוונים של צירי Ox,Oy שווים ל- 0

וגבול בכיוון שבו $x=y$ שווה ל $-\dfrac{1}{4}$

<u>שאלה 5</u>

א. $$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=-\sin x-\sin(x+y)=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=-\sin y-\sin(x+y)=0\end{cases}$$

פונקציה $\varphi(x)=\sin x$ היא עולה ממש בקטע $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, לכן חד-חדערכית ולכן $\sin x=\sin y$

$x,y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ גורר ש $x=y$.

מכאן מקבלים את המשוואה השניה: $-\sin x-\sin 2x=0\ ,\ \sin 2x=2\sin x\bullet\cos x$

$\sin x(1+2\cos x)=0\ ,\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right], \Leftarrow\ \cos x\geq 0$ לכן $\sin x=0\ ,\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\ \Leftarrow$

$\Leftarrow\ x=0$ -הוא הפתרון היחיד ובכן $(x,y)=(0,0)$ -היא התשובה יחידה

<u>בדיקה</u>: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\cos(x+y)\ ,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\cos y-\cos(x+y),\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\cos x-\cos(x+y)$

$A=-2, B=-1, C=-2, \Delta=3>0$ לכן $(0,0)$ היא נקודת מקסימום מקומי.

ב. נבדוק את הפונקציה בשפה של הריבוע

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right)=-\sin y; \cos\left(-\frac{\pi}{2}+y\right)=\sin y; \cos\left(\pm\frac{\pi}{2}+y\right)=0$$

1. $x=-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\leq y\leq\dfrac{\pi}{2}$ נציב ל- $f(x,y)$ ונקבל

$$g(y)=\cos y+\sin y$$
$$g'(y)=-\sin y+\cos y$$
$$g'(y)=0\Leftrightarrow tg(y)=1\Leftrightarrow y=\frac{\pi}{4},\left(y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2};g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

.2 $x=\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ נציב ל- $f(x,y)$ ונקבל

$$g(y)=\cos y-\sin y$$
$$g'(y)=-\sin y-\cos y$$
$$g'(y)=0\Leftrightarrow tg(y)=-1\Leftrightarrow y=-\frac{\pi}{4},\left(y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$g\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2};g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1;g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$$

.3 $y=\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ נציב ל- $f(x,y)$ ונקבל

$$h(x)=\cos x-\sin x$$
$$h'(x)=-\sin x-\cos x$$
$$h'(x)=0\Leftrightarrow tg(x)=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4},\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$h\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2};h\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1;h\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$$

.4 $y=-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ נציב ל- $f(x,y)$ ונקבל

$$h(x)=\cos x+\sin x$$
$$h'(x)=-\sin x+\cos x$$
$$h'(x)=0\Leftrightarrow tg(x)=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4},\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2};h\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;h\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

<u>ערך הכי גדול</u>: $f(0,0)=3$

<u>ערך הכי קטן</u>: $f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=-1,\ f\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)=-1$