אוניברסיטת בן גוריון בנגב

<u>מדור בחינות</u>

מס' הנבחן:______________

תאריך הבחינה: <u>30.06.2004</u>
שם המורה: <u>גולדשטיין, לוין, ליידרמן</u>
מבחן ב: <u>חדו"א א2</u>
מס' הקורס: <u>201-1-0021</u>
מיועד לתלמידי: <u>מתמטיקה, מדעי המחשב</u>
שנה: <u>א'</u>, סמ': <u>ב'</u>, מועד: <u>א'</u>
משך הבחינה: <u>2.5 שעות</u>
חומר עזר: <u>דף נוסחאות אחד (2 עמודים)</u>
<u>מחשב כיס פשוט עם צג קטן</u>

ענו על 4 השאלות מתוך 5.
כל שאלה שווה 25 נקודות.
כל התשובות חייבות להיות מלאות ומנומקות היטב.

<u>השאלות:</u>

1. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה על $[a,b]$ המקיימת את התנאי הבא:
$\int_a^b f(x)g(x)dx=0$ לכל פונקציה $g(x)$ רציפה על $[a,b]$ כך ש- $\int_a^b g(x)dx=0$.
הוכח ש- $f(x)$ פונקציה קבועה על $[a,b]$, כלומר קיים קבוע C כך ש- $f(x)=C$ לכל $x\in[a,b]$.

2. מצא את כל הערכים של $\alpha>0$ שעבורם האינטגרל הלא-אמיתי $\int_0^\infty \sin x\frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}dx$

א. מתכנס בתנאי.
ב. מתכנס בהחלט.

3. תהי פונקציה מוגדרת כסכום הטור $S(x)=\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\sin\frac{x}{n}$. הראה כי

א. הפונקציה $S(x)$ מוגדרת היטב לכל x ו- $S(x)$ רציפה לכל $x\in(-\infty,\infty)$.
ב. הטור בתחום $(-\infty,\infty)$ לא מתכנס במידה שווה.

4. מצא את כל הנקודות $(x,y)\in R^2$ בהן הפונקציה $f(x,y)=\sqrt{|x^3y|}$ דיפרנציאבילית.

5. נתונה הפונקציה $f(x,y)=\frac{1}{3}x^3-4x+xy^2$.

א. מצא את כל הנקודות של אקסטרמום מקומי של $f(x,y)$.
ב. מצא את הערך הכי גדול ואת הערך הכי קטן של $f(x,y)$ בעיגול $\{(x,y):x^2+y^2\le1\}$.

-בהצלחה-

פתרונון של המבחן מועד א' 2004

שאלה 1

נניח בשלילה ש- $f(x)$ לא קבוע על $[a,b]$, אז $f(x)$ תהיה לא קבוע אל (a,b) (כי אחרת לפי הרציפות של $f(x)$, $f(x)$ חיבת להיות קבוע על $[a,b]$)

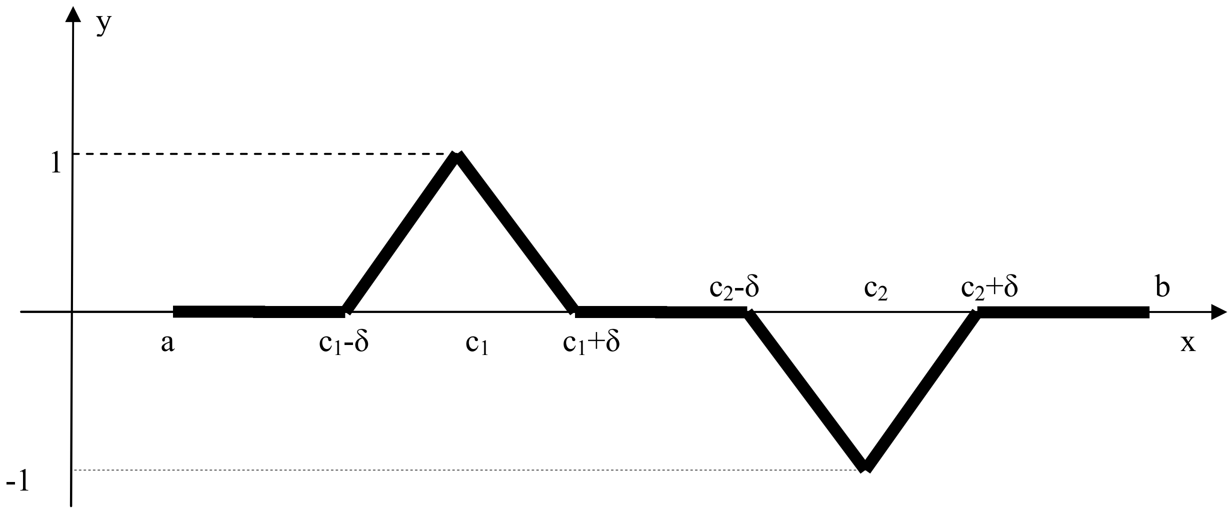
קח $a<c_1<c_2<b$ כך ש- $f(c_1)\neq f(c_2)$ ונסמן $\varepsilon=\frac{1}{3}|f(c_1)-f(c_2)|$. לפי הרציפות של $f(x)$ קיים $\delta>0$ מספיק קטן כך ש:

$a<c_1-\delta<c_1<c_1+\delta<c_2-\delta<c_2<c_2+\delta<b$

ו- $|f(x)-f(c_1)|<\varepsilon$ לכל x כך ש- $|x-c_1|<\delta$

$|f(x)-f(c_2)|<\varepsilon$ לכל x כך ש- $|x-c_2|<\delta$

נגדיר $g(x)$ ע"י הגרף $y=g(x)$



אז $g(x)$ רציפה על $[a,b]$, (שטח המשולש) $\int_{c_1-\delta}^{c_1+\delta} g(x)dx=\delta$, $\int_{c_2-\delta}^{c_2+\delta} g(x)dx=-\delta$, ו- $\int_a^b g(x)dx=0$

מזה נקבל ש:

$$\left|\int_{c_1-\delta}^{c_1+\delta} f(x)g(x)dx-f(c_1)\delta\right|=\left|\int_{c_1-\delta}^{c_1+\delta} f(x)g(x)dx-\int_{c_1-\delta}^{c_1+\delta} f(c_1)g(x)dx\right|=$$

$$=\left|\int_{c_1-\delta}^{c_1+\delta}\left[f(x)-f(c_1)\right]g(x)dx\right|\leq\left|\int_{c_1-\delta}^{c_1+\delta}\left|f(x)-f(c_1)\right|\left|g(x)\right|dx\right|\leq$$

$$\leq\left|\int_{c_1-\delta}^{c_1+\delta}\varepsilon\left|g(x)\right|dx\right|=\varepsilon\delta$$

באופן דומא מראים ש –

$$\left|\int_{c_2-\delta}^{c_2+\delta} f(x)g(x)dx-f(c_2)\delta\right|\leq\varepsilon\delta$$

אז

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| = \left|\int_{c_1-\delta}^{c_1+\delta} f(x)g(x)dx + \int_{c_2-\delta}^{c_2+\delta} f(x)g(x)dx\right| \geq$$

$$\geq \left|f(c_1)\delta - f(c_2)\delta\right| - 2\varepsilon\delta = \left|f(c_1) - f(c_2)\right|\delta - 2\varepsilon\delta = 3\varepsilon\delta - 2\varepsilon\delta = \varepsilon\delta > 0$$

<u>הסתירה הזאת מוכיחה את הטענה.</u>

<u>שאלה 2</u>

$$\int_0^\infty \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}dx = \int_0^1 \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}dx + \int_1^\infty \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}dx$$

$$\sin x \sim \ln(x+1) \sim x, x \to 0$$

לכן לפי מבחן השוואה : $\int_0^1 \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}dx \sim \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-2}}dx$ מתכנס אם קיים $\alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 3$

$\int_1^\infty \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}dx$ מתכנס ל כל $\alpha > 0$ לפי מבחן דיריכלה

$f(x) = \sin x$ בעלת פונקציה קדומה חסומה, $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}$ ו - $g(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

$$g'(x) = \frac{\frac{x^\alpha}{x+1} - \alpha x^{\alpha-1}\ln(x+1)}{x^{2\alpha}} = \frac{\frac{x}{x+1} - \alpha\ln(x+1)}{x^{\alpha+1}} < 0$$

החל מ- x_0 מסוים כי $\frac{x}{x+1} - \alpha\ln(x+1) \xrightarrow[x\to\infty]{} -\infty$ ולכן $g(x)$ מונוטונית יורדת החל מ- x_0. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^\alpha} = 0$

נוכיח עכשיו שאינטגרל מתכנס בהחלט רק עבור $\alpha > 0$

$\alpha \leq 1 \Leftarrow$ $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx$ מתבדר ואזי $\int_1^\infty |\sin x| \frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}dx$ גם מתבדר לפי מבחן השוואה.

$\alpha > 1 \Leftarrow$ נקבע β כך ש- $\alpha > \beta > 1$ אזי $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^{\alpha-\beta}} = 0$, $|\sin x| \leq 1$

ולכן $\int_1^\infty |\sin x| \frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}dx$ מתכנס לפי מבחן השוואה, כי $\int_1^\infty \frac{1}{x^\beta}dx$ מתכנס

<u>תשובה</u>

א. אינטגרל מתכנס בתנאי אם $0 < \alpha \leq 1$

ב. אינטגרל מתכנס בהחלט אם $1 < \alpha \leq 3$

<u>שאלה 3</u>

א. נראה שטור מתכנס במידע שוה בקטע $[-a,a]$ כאשר $a > 0$ שרירותי ולכן סכום של טור $S(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-a,a]$ ולכן $S(x)$ רציפה לכל $x \in (-\infty,\infty)$.

$$\forall x \ \ \exists k_0 \ , \forall k > k_0 \ , \left|\frac{x}{k}\right| \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

ולכן סידרה $\left\{\left|\sin\frac{x}{k}\right|\right\}_{k=1}^\infty$ היא סידרה מונוטונית יורדת הל מ $k \geq k_0$.

$\left|\sin\frac{x}{k}\right| \le \left|\frac{x}{k}\right|$ כי $\left|\sin\frac{x}{k}\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

תנאים של מבחן Leibniz מתקיים וטור מתכנס לכל x.

נסמן שארית של טור $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k\sin\frac{x}{k}$ אז $\left|R_n(x)\right| \le \left|\sin\frac{x}{n+1}\right| \le \frac{|x|}{n+1}$

מפכר $\forall x\in[-a,a]\ \left|R_n(x)\right| \le \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

זה מוכיח ש $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ במידה שווה בקטע $[-a,a]$

ב. בתכום $(-\infty,\infty)$ לא מתקיים קריטריון Cauchy

$$\exists\varepsilon=\frac{1}{2},\forall n,\exists p=1,\exists x=(n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(-1)^k\sin\frac{x}{k}\right|=\left|\sin\frac{x}{n+1}\right|=1>\varepsilon$$

ולכן טור לא מתכנס במידה שווה בתכום $(-\infty,\infty)$

שאלה 4

אם $x_0^3y>0$ או $x_0^3y<0$ אזי פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה (x_0y_0) כי x^3y שומר על אותו סימן בסביבה של (x_0y_0) ולכן $f(x,y)=\sqrt{x^3y}$ או $f(x,y)=\sqrt{-x^3y}$ בסביבה של נקודה. נחקור בנקודות מסוג $(x\ ,0)$ ו $(0,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=0;\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=\lim_{\vartriangle y\to 0}\frac{\sqrt{\left|x^3\vartriangle y\right|}}{\vartriangle y}$$

גבול לא קיים אם $x\ne 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)=0;\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)=\lim_{\vartriangle x\to 0}\frac{\sqrt{\left|(\vartriangle x)^3y\right|}}{\vartriangle x}=\lim_{\vartriangle x\to 0}\sqrt{\left|\vartriangle x\right|}\sqrt{|y|}\,sign(\vartriangle x)=0$$

נרשום את התוספת שלמה בנקודה $(0,y)$:

$$\sqrt{\left|(\vartriangle x)^3(y+\vartriangle y)\right|}-0=0\bullet\vartriangle x+0\bullet\vartriangle y+\varepsilon(\vartriangle x,\vartriangle y)\sqrt{(\vartriangle x)^2+(\vartriangle y)^2}$$

$$\varepsilon(\vartriangle x,\vartriangle y)=\sqrt{\frac{\left|(\vartriangle x)^3(y+\vartriangle y)\right|}{(\vartriangle x)^2+(\vartriangle y)^2}}=\sqrt{\left|\vartriangle x\right|}\sqrt{\left|y+\vartriangle y\right|}\sqrt{\frac{(\vartriangle x)^2}{(\vartriangle x)^2+(\vartriangle y)^2}}\xrightarrow[\substack{\vartriangle x\to 0\\ \vartriangle y\to 0}]{}0$$

כי $\frac{(\vartriangle x)^2}{(\vartriangle x)^2+(\vartriangle y)^2}\le 1$

לכן $f(x,y)=\sqrt{\left|x^3y\right|}$ דיפרנציאבילית לכל נקודה (x,y) פרט לנקודה $(x,0),x\ne 0$

שאלה 5

א.

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dx} = x^2 - 4 + y^2 \\ \dfrac{df}{dy} = 2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2 \end{cases}; \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

4 נקודות חשודות לאקסטרמום $P_1(2,0), P_2(-2,0), P_3(0,2), P_4(0,-2)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$$

בדיקה על סמן הרקיטריון:

$$P_1 : \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; \Delta = 16 > 0 \Rightarrow \min$$

$$P_2 : \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}; \Delta = 16 > 0 \Rightarrow \max$$

$P_3, P_4 : \Delta = -16 < 0$ ז"א P_3, P_4 נק' אוכף

ב. כל הנקודות P_i לא שייכות לתכום $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\right\}$

נחקור על השפה : $x \in (-\infty, \infty), y^2 = 1 - x^2$

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + x(1 - x^2) = -3x - \frac{2}{3}x^3$$

$$g'(x) = -3 - 2x^2 \ne 0$$

ערך הכי קטן : $g(1) = -\dfrac{11}{3}$

ערך הכי גדול : $g(-1) = \dfrac{11}{3}$