עבודת בית 4

__שאלה 1__ יהי $X\neq\phi$ ו- $\mathcal{F}$ σ-אלגברה של תת-קבוצות של קבוצה X. הוכח כי פונקציה $f(x):X\to\mathbb{R}$ מדידה אם ורק אם $f^{-1}(q,\infty)\in\mathcal{F}$ לכל מספר רציונלי $q\in\mathbb{Q}$.

__שאלה 2__ יהי $X\neq\phi$ ו- $\mathcal{F}$ σ-אלגברה של תת-קבוצות של קבוצה X. נניח כי $f(x):X\to\mathbb{R}$ ו- $g(x):X\to\mathbb{R}$ הן שתי פונקציות מדידות. תהי $\varphi(x):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה של שני משתנים. הוכח כי פונקציה

$$h(x)=\varphi(f(x),g(x)):X\to\mathbb{R}$$ מדידה.

__שאלה 3__ תהי $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית. הוכח כי $f(x)$ היא פונקציה מדידה Borel, כלומר $f^{-1}(U)$ זו קבוצת Borel לכל קבוצת Borel $U\subset\mathbb{R}$.

__שאלה 4__ תהי $X\neq\phi$ קבוצה ו- $\mathcal{F}$ σ-אלגברה של תת-קבוצות של X. נניח כי $f_n(x):X\to\mathbb{R}$ זו פונקציה מדידה לכל $n\in\mathbb{N}$. נסמן על ידי A קבוצה של $x\in X$ כך שקיים גבול סופי $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. הוכח כי קבוצה A מדידה, צ"ל: $A\in\mathcal{F}$.

__שאלה 5__ תהי $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה מדידה Lebesgue. נניח כי $\int_{[a,c]} f(x)\,d\mu=0$ לכל $c\in[a,b]$. הוכח כי $f(x)\sim 0$, צ"ל, אם $A=\{x\in X: f(x)\neq 0\}$ אז $\mu(A)=0$.

שאלה 6 תהי $E\subset\mathbb{R}$ קבוצה מדידה Lebesgue ו-$\mu(E)<\infty$. נניח כי $f(x):E\to\mathbb{R}$ פונקציה מדידה. הוכיחו כי קיימת פונקציה מדידה $\varphi(x):E\to\mathbb{R}$ כך ש- $\varphi(x)>0$ לכל $x\in E$! $\int_E \varphi(x)f(x)\,d\mu<\infty$.

שאלה 7 יהיו $f_n(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות מדידות Lebesgue לכל $n\in\mathbb{N}$. נניח כי $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ כמעט לכל $x\in[a,b]$.

(a) הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}\cos(f_n(x))\,d\mu=\int_{[a,b]}\cos(f(x))\,d\mu$

(b) האם בהכרח $\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}f_n(x)\,d\mu=\int_{[a,b]}f(x)\,d\mu$?

שאלה 8 נניח כי $C\subset[0,1]$ מסמן קבוצת Cantor הסטנדרטית. נגדיר פונקציה $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ באופן הבא: אם $x\in C$ אזי $f(x)=x$; לכל $x\notin C$, אם x שייך לקטע פתוח שהוסר ב- $[0,1]\setminus C$ באורך $\frac{1}{3^n}$) אזי $f(x)=\frac{1}{2^n}$. למשל

$$f|_{(\frac{1}{3},\frac{2}{3})}=\frac{1}{2}$$

$$f|_{(\frac{1}{9},\frac{2}{9})\cup(\frac{7}{9},\frac{8}{9})}=\frac{1}{4}.$$

(a) מצאו ערך $\int_{[0,1]}f(x)\,d\mu$ המובן Lebesgue

(b) הוכיחו $f(x)$ אינטגרבילית במובן Riemann? אם כן אזי מהו $\int_0^1 f(x)\,dx$?

<u>שאלה 9</u> תהי μ מידת Lebesgue בקו הממשי $\mathbb{R}$! $1 \le p < \infty$ מספר קבוע. נסמן על ידי $L_p(E)$ מרחב ליניארי של פונקציות מדידות $f(x): E \to \mathbb{R}$ כך ש $\int_E |f(x)|^p d\mu < \infty$. (תזכירו כי אנחנו מזהים שתי פונקציות $f(x), g(x)$ כך ש- $E(f \neq g)$ קבוצה עם מידה שווה 0.)
הוכחו כי $L_p(E)$ מרחב נורמי עם נורמה $\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p}$.

<u>שאלה 10</u> תהי $E \subset \mathbb{R}$ קבוצה מדידה Lebesgue ו- $0 < \mu(E) < \infty$.

(a) הוכחו כי אם $f(x) \in L_2(E)$ אז גם $f(x) \in L_1(E)$.

(b) נניח מוכחות ש $[f(x)]^2$ פונקציה חסומה ואינטגרבילית לפי Lebesgue, האם בהכרח נובע כי $f(x)$ גם אינטגרבילית לפי Lebesgue?