יסודות האנליזה להנדסת חשמל – עבודה 3

שאלה 1:

נסמן $\mathcal{F}_t = \{B_\alpha : \alpha \in A\}$ ו-$\cap\, \mathcal{F}_t = \mathfrak{F}$. על מנת להראות ש-$\mathfrak{F}$ היא σ-אלגברה, נבדוק את האקסיומות השונות:

1. $\emptyset \in \mathfrak{F}$: מכיוון ש-$\mathcal{F}_t$ הן σ-אלגבראות, כל אחת מכילה את $\emptyset$, ולכן $\emptyset \in \mathfrak{F}$.
2. לכל $D \in X$, אם $D \in \mathfrak{F}$ אז $X\backslash D \in \mathfrak{F}$: אם $D \in \mathfrak{F}$, אז $D \in \mathcal{F}_t$ לכל t מתכונות החיתוך. מכיוון ש-$\mathcal{F}_t$ הן σ-אלגבראות, $X\backslash D \in \mathcal{F}_t$ לכל t. לפיכך, $X\backslash D \in \mathfrak{F}$.
3. לכל $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{F}$ מתקיים ש-$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathfrak{F}$: נניח $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{F}$. מתכונות החיתוך, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}_t$ לכל t. לכן, מכיוון ש-$\mathcal{F}_t$ הן σ-אלגבראות, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}_t$ לכל t. מתכונות החיתוך נקבל ש-$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathfrak{F}$ כנדרש.

שאלה 2:

הגדרה של σ-אלגברה של בורל על $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \cap\{\mathcal{F} : \mathcal{F}\ is\ \sigma - algebra\ and\ G \subset \mathcal{F}, G\ collection\ of\ open\ sets\ \}$$

למעשה, זאת σ-אלגברה מינימלית המכילה את כל הקבוצות הפתוחות.

א. $\mathcal{K}_1 = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{K}_1$ היא אוסף של קבוצות פתוחות ולכן מהגדרה של $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ מתקיים $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. מכיוון ש-$\sigma(\mathcal{K}_1)$ מוגדרת להיות ה-σ-אלגברה המינימלית המכילה את $\mathcal{K}_1$, ו-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ היא בפרט σ-אלגברה המכילה את $\mathcal{K}_1$, אז מתקיים $\sigma(\mathcal{K}_1) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. מצד שני, כל קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}$ ניתן לייצג כאיחוד זר בן-מניה של קטעים פתוחים, כל אחד מ-$\mathcal{K}_1$, לכן $\sigma(\mathcal{K}_1)$ מכילה את כל הקבוצות הפתוחות ב-$\mathbb{R}$ ומתקיים $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{K}_1)$. קיבלנו $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{K}_1)$.

ב. $\mathcal{K}_2 = \{[a,b] : a, b \in \mathbb{R}\}$. כל קטע פתוח מ-$\mathcal{K}_1$ ניתן לרשום כאיחוד בן-מניה של קטעים סגורים באופן הבא: $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$. מכאן ש-$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{K}_1) \subset \sigma(\mathcal{K}_2)$. מצד שני, ניתן גם לרשום $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$, ולכן מתקיים $\sigma(\mathcal{K}_2) \subset \sigma(\mathcal{K}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. סה"כ, קיבלנו $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{K}_2)$.

ג. $\mathcal{K}_3 = \{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. נשים לב כי $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a + \frac{1}{n}, b\right)$. לכן, באופן דומה למקודם: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{K}_1) \subset \sigma(\mathcal{K}_3)$. מצד שני, $[a,b) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, b\right)$, ולכן, באופן דומה למקודם, מתקיים $\sigma(\mathcal{K}_3) \subset \sigma(\mathcal{K}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. קיבלנו $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{K}_3)$.

הראינו $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{K}_1) = \sigma(\mathcal{K}_2) = \sigma(\mathcal{K}_3)$.

שאלה 3:

תחילה, מכיוון ש-$|X| > \aleph_0 > 0$, אז $X \neq \emptyset$.

נראה ש-$F = \{A \subset X : |A| \leq \aleph_0\ \ or\ |X\backslash A| \leq \aleph_0\}$ היא σ-אלגברה:

1. $\emptyset \in F$ – טריוויאלי, שכן $|\emptyset| = 0 < \aleph_0$.
2. לכל $A \in X$, אם $A \in F$ אז $X\backslash A \in F$: נניח $A \in F$. מאופן הגדרת F, $A \in F$ מכיוון ש-$|A| \leq \aleph_0$ או ש-$|X\backslash A| \leq \aleph_0$. לכן, בהכרח $X\backslash A \in F$ (כי או של-A או של-$X\backslash A$ יש עוצמה שלא עולה מעל $\aleph_0$).
3. לכל $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ מתקיים ש-$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$: נניח $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$. אם כל A_n היא בת-מניה (או סופית), אז האיחוד חייב להיות בן-מניה או סופי, ובפרט מתקיים $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$. אחרת, לפחות אחת איננה בת-מניה. באי הגבלת הכלליות, $|A_1| > \aleph_0$. נתבונן במשלים:

$$X \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n)$$

מכיוון ש-$A_1 \in F$, $|X \setminus A_1| \leq \aleph_0$ (אחרת, מהגדרת F, $A_1 \notin F$). מתכונות החיתוך נקבל ש-$|\bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus A_n)| \leq \aleph_0$, כלומר $|X \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)| \leq \aleph_0$ ואז $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$.

נותר להראות ש-$\mu(A)$ היא מידה:

1. $\mu(\emptyset) = 0$, שכן $|\emptyset| = 0 < \aleph_0$.
2. σ-אדיטיביות: נניח $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ כאשר $A_i \cap A_j = \emptyset$ לכל $i \neq j$. נתבונן בערך ש-μ מתאימה לאיחוד $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

נחלק למקרים. אם $|A| \leq \aleph_0$, אז בהכרח A_n בנות-מניה (אחרת, סתירה לכך ש-A בת-מניה). כמו כן, $\mu(A) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

אם $|A| > \aleph_0$, אז בהכרח $|X \setminus A| \leq \aleph_0$ (משיקולים זהים למקודם) ו-$\mu(A) = 1$. על מנת להראות שגם במקרה הזה μ היא σ-אדיטיביות, נעזר בלמה הבאה:

<u>למה:</u> נניח A (מוגדרת כמו בתרגיל) איננה בת-מניה. אזי בהכרח קיים i יחיד עבורו A_i איננה בת-מניה.
<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה שקיים $j \neq i$ כך שגם A_i וגם A_j אינן בנות-מניה. לכן $X \setminus A_i$ וגם $X \setminus A_j$ בנות-מניה. מחוקי דה-מורגן מתקיים ש-$(X \setminus A_i) \cup (X \setminus A_j) = X \setminus (A_i \cap A_j) = X \setminus \emptyset = X$. אולם, X איננה בת-מניה, ולכן לא ניתן לרשום אותה כאיחוד של 2 קבוצות בנות-מניה – סתירה.

מהלמה הנ"ל, קיים i יחיד שעבורו A_i איננה בת-מניה ומתקיים ש-$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A_i) = 1$.

סה"כ קיבלנו ש-(X, F, μ) כמתואר בתרגיל הוא מרחב מידה.

שאלה 4:

נניח בשלילה כי μ הנתונה הינה מידה. כעת נביט בדוגמא הבאה: ניקח $X = \mathbb{N}$.$\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$ היא קבוצת החזקה של X והיא σ-אלגברה באופן טריוויאלי. נגדיר סדרת קבוצות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ כך ש $A_n = \{n\}$ (היחידון עם הערך המתאים לאינדקס). קבוצות אלו זרות זו לזו.

מתקיים ש-$\forall n: |A_n| = 1$ ולכן $\forall n: \mu(A_n) = 0$. מכאן: $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$.

מצד שני, $\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$, ולכן $\mu(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\mathbb{N}) = \infty$.

כלומר מצאנו $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ זרות זו לזו כך ש $\mu(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ בסתירה להגדרה של מידה.

שאלה 5:

$X \neq \emptyset$, $\mathcal{P}(X)$ היא σ-אלגברה באופן טריוויאלי, ולכן נותר להראות כי μ הנתונה היא אכן מידה.

1. **<u>מידה של קבוצה ריקה:</u>** לכל $p \in X$ מתקיים $p \notin \emptyset$ מהגדרת קבוצה ריקה. לכן $\mu(\emptyset) = 0$.
2. **<u>$\sigma-$אדיטיביות:</u>** לכל סדרת קבוצות זרות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ ועבור כל נקודה $p \in X$ מתקיים אחד מהשניים: $p \in A_n$ עבור n כלשהו או ש-$p \notin A_n$ לכל n.

אם $p \in A_n$, אז $p \in \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n$. מצד שני, מכיוון שהקבוצות זרות, $p \notin A_m$ לכל $n \neq m$. נקבל:

$$\mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{1}_{p \in \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n} = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{p \in A_n} = 1$$

במקרה השני, בו $p \notin A_n$ לכל n, מכיוון שהקבוצות זרות מתקיים ש-$p \notin \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n$. לכן:

$$\mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{1}_{p \in \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n} = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{p \in A_n} = 0$$

מכאן שמתקיימת התכונה של $\sigma-$אדיטיביות. כלומר, $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ הוא מרחב מידה.

שאלה 6:

סעיף א':

נגדיר קבוצה חדשה, $B_n = A_n \backslash (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1})$. נשים לב שמתקיים:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \biguplus_{n=1}^{\infty} B_n$$

μ היא מידה, ולכן σ-אדיטיבית. מהגדרת סכום של טור נקבל:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\biguplus_{n=1}^{N} B_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mu(A_N)$$

כאשר המעבר האחרון נכון מכיוון ש-$\mathrm{A}_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ (ואז כל איחוד סופי של A_n מוכל ב-A_N עבור $N > n$).

סעיף ב':

למה: אם $\mu(B) < \infty$ אז לכל $A \subseteq B$ מתקיים ש-$\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$

הוכחה: נרשום $B = A \uplus (B\backslash A)$. מתכונות מידה, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(A \uplus B)$. כאשר $\mu(B) < \infty$, ההפרש $\mu(B) - \mu(A)$ מוגדר היטב

נגדיר קבוצה חדשה, $B_n = A_1 \backslash A_n$. כלומר:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \backslash A_n) = A_1 \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

כאשר המעבר האחרון נכון בגלל ש-$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$. מכיון ש-$\mu(A_1) < \infty$ ניתן לכתוב:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

מסעיף א' נקבל ש:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mu(B_N) = \lim_{N\to\infty} [\mu(A_1) - \mu(A_N)] = \mu(A_1) - \lim_{N\to\infty} \mu(A_N)$$

כלומר:

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mu(A_N)$$

נראה ש-$\mu(A_1) < \infty$ הכרחי. נתבונן במידת לבג עם הסדרה $A_n = (n, \infty)$.

מתקיים ש- $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$, ולכל A_n מידה ∞ (בפרט, לגבול). אולם, החיתוך ריק ו:

$$\mu(\cap A_n) = 0$$

שאלה 7:

1. נגדיר את הקבוצה הבאה: $A = (0,1) \uplus \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. קבוצה זו סגורה כאיחוד סופי של קבוצות סגורות (של $[0,1]$ ו-$\{n \in \mathbb{N}: n \geq 2\}$) אך איננה חסומה. A מדידה לפי לבג משאלה 8 ($F = \left[\frac{\varepsilon}{4}, 1 - \frac{\varepsilon}{4}\right] \subset A$ סגורה ו-$\mu(A\backslash F) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ לכל $\varepsilon > 0$). מכיוון ש-$\mathbb{N}$ בת-מניה, מידת לבג של A היא:

$$\mu(A) = \mu\big((0,1)\big) + \mu(\mathbb{N}) = \mu\big((0,1)\big) = 1$$

2. ניקח את קבוצת קנטור:

$$F_0 = [0,1], F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], F_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right], \ldots$$

עבור האיבר F_n נקבל איחוד של 2^n קטעים סגורים וזרים, אורכו של כל אחד $\frac{1}{3^n}$.

הקבוצה מוגדרת : $C=\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. קבוצה זו סגורה (כחיתוך קבוצות סגורות) וחסומה ולכן קומפקטית ב-$\mathbb{R}$. בנוסף, C מדידה לפי לבג. $|C|=\mathfrak{c}$ מההרצאה (על ידי הצגה טרנרית).
מהגדרתה $C\subset F_n$ ולכן $\mu(C)\le\mu(F_n)$.

$$\mu(C)\le\mu(F_n)\le 2^n\cdot\frac{1}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

ומסנדוויץ' נקבל $\mu(C)=0$.

3. ניקח את קבוצת Fat Cantor. הבנייה שלה דומה לשל קבוצת קנטור, רק שמורידים את הרבע האמצעי מכל תת קטע בכל שלב:

$$F_0=[0,1],F_1=\left[0,\frac{3}{8}\right]\cup\left[\frac{5}{8},1\right],F_2=\left[0,\frac{5}{32}\right]\cup\left[\frac{7}{32},\frac{3}{8}\right]\cup\left[\frac{5}{8},\frac{25}{32}\right]\cup\left[\frac{27}{32},1\right],\dots$$

בדומה לקבוצת קנטור, $C_{fat}=\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. קבוצה זו סגורה (כחיתוך קבוצות סגורות) וחסומה ולכן קומפקטית ב-$\mathbb{R}$, ומדידה לפי לבג. בנוסף $|C_{fat}|=\mathfrak{c}$ באופן דומה לקבוצת קנטור.

בכל שלב בבנייה מורידים רבע מכל תת-קטע שנותר, כלומר מחסירים סך של $\frac{2^n}{2^{2n+2}}=\frac{1}{2^{n+2}}$ בכל שלב. סך אורכי הקטעים שמחסירים הינו:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots=\frac{1}{2}$$

ולכן $\mu(C_{fat})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$.

שאלה 8:

הערה: נסמן $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$ כאוסף הקבוצות המדידות לפי לבג ב-$\mathbb{R}$. כמו כן, $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ היא σ-אלגברה של קבוצות בורל. נזכור ש-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})\subset\mathfrak{L}(\mathbb{R})$ ולכן כל $A\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ מדידה לפי לבג. בפרט, קבוצות שהן F_σ או G_δ מדידות.

$(a)\Leftarrow(b)$: נניח ש-$A\subset\mathbb{R}$ מדידה. A מדידה, לכן $A_n=A\cap[-n,n]$ מדידה לכל $n\in\mathbb{N}$. יהא $\varepsilon>0$. כל A_n ניתן לכסות באמצות קטעים פתוחים, $V_n=\biguplus_{i=1}^{\infty}U_{i,n}$, כך ש- $\mu(V_n)<\mu(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}$. נתבונן באיחוד הכיסויים, $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n$. U הוא איחוד של קבוצות פתוחות, ולכן U פתוחה. בנוסף, $A\subset U$ ו-$U\backslash A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n\backslash A_n$. לכן:

$$m(U\backslash A)\le\sum_{n=1}^{\infty}m(V_n\backslash A_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}[m(V_n)-m(A_n)]\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$$

$(b)\Leftarrow(a)$: תהא $A\subset\mathbb{R}$. מההנחה של (b), קיימת קבוצה פתוחה $A\subset U_n$ כך ש-$\mu(U_n\backslash A)<\frac{1}{n}$ לכל n. נתבונן בחיתוך $U=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$. U מדידה כי היא G_δ. לכל n מתקיים ש-$U\backslash A\subseteq U_n\backslash A$, ולכן:

$$\mu(U\backslash A)\le\mu(U_n\backslash A)\le\frac{1}{n}$$

מכיוון שהטיעון נכון לכל n, אז $\mu(U\backslash A)=0$ ו-$U\backslash A$ מדידה. מכיוון ש-$U=A\uplus(U\backslash A)$ אזי בהכרח A מדידה.

לשקילות $(b)\Leftrightarrow(c)$ נעזר בלמה הבאה:

למה: $A\backslash B=B^c\backslash A^c$
הוכחה: נתבונן בהגדרה של $A\backslash B$: $A\backslash B=\{x\in A:x\notin B\}$. לכל $a\in A$ מתקיים ש-$a\notin A^c$. באופן דומה, לכל $b\notin B$, $b\in B^c$. לכן, $\{x\in A:x\notin B\}=\{x\notin A^c:x\in B^c\}=\{x\in B^c:x\notin A^c\}=B^c\backslash A^c$.

$(b)\Leftarrow(c)$: הראנו ש-$(b)\Leftrightarrow(a)$, ולכן A מדידה. A^c מדידה מכיוון ש-$A\in\mathfrak{L}(\mathbb{R})$ ו-$\mathfrak{L}(\mathbb{R})$ היא σ-אלגברה.
כלומר קיימת $U\supset A^c$ פתוחה כך ש-$\mu(U\backslash A^c)<\varepsilon$. נבחר $F=U^c$. מכיוון ש-U פתוחה, F סגורה ו-$F\subset A$.
מהלמה הנ"ל, $\mu(A\backslash F)=\mu(U\backslash A^c)<\varepsilon$ כנדרש.
$(c)\Leftarrow(b)$: מהלמה הנ"ל, מכיוון ש-$\mu(A\backslash F)<\varepsilon$ אזי $\mu(F^c\backslash A^c)<\varepsilon$. כמו כן, F^c פתוחה ו-$A^c\subset F^c$. מצאנו ש-(b) מתקיים עבור A^c. כלומר A^c מדידה. $A^c\in\mathfrak{L}(\mathbb{R})$ ו- $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$ היא σ-אלגברה, ולכן $A=(A^c)^c$ מדידה.

מסקנה: $A \subset \mathbb{R}$ מדידה לפי לבג אם ורק אם קיימות $F \subset A \subset U$ (F סגורה, U פתוחה) כך שלכל $\varepsilon > 0$ $\mu(U \backslash F) < \varepsilon$.

הוכחה: יהא $\varepsilon > 0$. מ-(b) נקבל שקיימת $U \supset A$ פתוחה כך ש-$\mu(U \backslash A) < \frac{\varepsilon}{2}$. מ-$(c)$ נקבל שקיימת $F \subset A$ סגורה כך ש-$\mu(A \backslash F) < \frac{\varepsilon}{2}$. נרשום:

$$\mu(U \backslash F) = \mu\big((U \cup A) \backslash (A \cap F)\big) = \mu(U \backslash A \uplus A \backslash F) = \mu(U \backslash A) + \mu(A \backslash F) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כאשר $F \subset A \subset U$ גורר ש-$U \backslash A \cap A \backslash F = \emptyset$.

שאלה 9:

$(1) \Rightarrow (2) + (3)$: נניח ש-$A$ מדידה לפי לבג. לכן, לפי המסקנה של שאלה 8, קיימות F_n סגורה ו-U_n פתוחה כך ש-$U_n \supset A \supset F_n$ ו-$\mu(U_n \backslash F_n) < \frac{1}{n}$. נסמן $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, היא F_σ. נסמן $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, היא G_δ. מאופן הגדרתן, $G \backslash F \subset U_n \backslash F_n$ לכל n, כלומר $\mu(G \backslash F) \leq \mu(U_n \backslash F_n) \leq \frac{1}{n}$. במילים אחרות – $\mu(G \backslash F) = 0$. מההוכחה של המסקנה בשאלה 8, נקבל ש-$\mu(A \backslash F) = \mu(G \backslash A) = 0$ ושהן מדידות. נשים לב שניתן לרשום $A = F \uplus (A \backslash F) = G \backslash (G \backslash A)$. לכן, $M_{(b)} = G \backslash A$ ו-$M_{(c)} = A \backslash F$.

$(2) + (3) \Rightarrow (1)$: נתון כי $A = G \backslash M_{(b)} = F \cup M_{(c)}$, כאשר $\mu\big(M_{(b)}\big) = \mu\big(M_{(c)}\big) = 0$, G היא G_δ ו-F היא F_σ. מכיוון ש-$\mu\big(M_{(b)}\big) = \mu\big(M_{(c)}\big) = 0$, $M_{(b)}$ ו-$M_{(c)}$ מדידות. F ו-G מדידות כי הן F_σ ו-G_δ בהתאמה. לפיכך, A מדידה כאיחוד או הפרש של קבוצות מדידות, בהתאמה.

שאלה 10:

תחילה, נראה ש-$A + x$ מדידה. A מדידה, ולכן לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $U \supset A$ פתוחה כך ש-$\mu(U \backslash A) < \varepsilon$ משאלה 8. U פתוחה, ולכן ניתן לרשום $U = \biguplus_{i=1}^{\infty} U_i$ כאשר U_i הם קטעים פתוחים. אחרי ההעתקה, הקטעים המוזזים מכסים את $A + x$. כלומר:

$$A + x \subset U + x = \biguplus_{i=1}^{\infty} (U_i + x) = \biguplus_{i=1}^{\infty} V_i = V$$

לכן, לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $V \supset A + x$ פתוחה כך ש-$\mu\big(V \backslash (A + x)\big) < \varepsilon$.

נותר להראות ש-$\mu(A) = \mu(A + x)$. באותם הסימונים כמו קודם, לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים ש:

$$\mu(A + x) \leq m\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} (U_i + x)\right) + \varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} m(U_i + x) + \varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} m(U_i) + \varepsilon$$

כאשר המעבר האחרון מנצל את העובדה שהזזת קטע לא משנה את האורך. אי השוויון נכון לכל ε, אז:

$$\mu(A + x) \leq \mu(A)$$

בכיוון השני, $A + x \subset \mathbb{R}$, ולכן $A + x \subset \biguplus_{i=1}^{\infty} V_i$. עבור V_i קטעים פתוחים. לכן, אם נעתיק את V_i ל-A, אז הקטעים המוזזים מכסים את A. כלומר, נגדיר $V_i - x = \{v - x : v \in V_i\}$ ונקבל ש-$A = \biguplus_{i=1}^{\infty} (V_i - x)$. לכן, לכל $\varepsilon > 0$:

$$\mu(A) \leq m\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} (V_i - x)\right) + \varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} m(V_i - x) + \varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} m(V_i) + \varepsilon$$

אי השוויון נכון לכל ε, אז:

$$\mu(A) \leq \mu(A + x)$$

מכיוון ש-$\mu(A + x) \leq \mu(A)$ וגם $\mu(A) \leq \mu(A + x)$ אז $\mu(A) = \mu(A + x)$ כנדרש.