עבודת בית 3

שאלה 1 נניח כי $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in A}$ אוסף כלשהו של σ-אלגברות באותה קבוצה X. הוכיחו כי חיתוך $\bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{B}_\alpha$ זו גם σ-אלגברה ב X.

שאלה 2 נסמן על ידי $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ σ-אלגברה של קבוצת Borel הקבוצה של ממשיים $\mathbb{R}$.
אם $\mathcal{K}$ זו אוסף כלשהו של תתי-קבוצות של $\mathbb{R}$ אז $\sigma(\mathcal{K})$ מסמן את σ-אלגברה המינימלית שמכילה $\mathcal{K}$.
הוכיחו כי $\mathcal{B}(\mathbb{R})=\sigma(\mathcal{K}_1)=\sigma(\mathcal{K}_2)=\sigma(\mathcal{K}_3)$,
כאשר $\mathcal{K}_1 =$ אוסף של קטעים פתוחים (a,b) ב $\mathbb{R}$

$\mathcal{K}_2 =$ אוסף של קטעים סגורים $[a,b]$ ב $\mathbb{R}$

$\mathcal{K}_3 =$ אוסף של קטעים בצורה $[a,b)$ ב $\mathbb{R}$.

שאלה 3 תהי X קבוצה כלשהי עם עוצמה גדולה מ $\aleph_0$.
נגדיר משפחה של תתי-קבוצות

$$\mathcal{F}=\{A\subset X : |A|\le\aleph_0 \text{ או } |X\setminus A|\le\aleph_0\}$$

ונגדיר

$$\mu(A)=\begin{cases}1, & |X\setminus A|\le\aleph_0 \text{ אם}\\ 0, & |A|\le\aleph_0 \text{ אם}\end{cases}$$

הוכיחו כי $\mathcal{F}$ זו σ-אלגברה! μ זו מידה על $(X,\mathcal{F})$

שאלה 4 תנו דוגמה של קבוצה $X\neq\emptyset$ כך ש μ שמוגדרת על ידי:

$$\mu(A)=\begin{cases}\infty, & |A|\ge\aleph_0 \text{ אם}\\ 0, & |A|<\aleph_0 \text{ אם}\end{cases}$$

היא <u>לא</u> מידה על $(X,\mathcal{P}(X))$.

שאלה 5 תהי $X\neq\emptyset$ קבוצה כלשהי. נקבע נקודה $p\in X$ אחת.
נגדיר μ על σ-אלגברה $\mathcal{P}(X)$ כך:

$\mu(A)=1$ אם $p\in A$

$\mu(A)=0$ אם $p\notin A$.

הוכיחו כי μ זו מידה על $(X,\mathcal{P}(X))$

הערה: μ כזאת נקראת מידה אטומית.

שאלה 6 יהי $(X, \mathcal{B}, \mu)$ מרחב מידה כלשהו.

נניח כי $A_i \in \mathcal{B}$ לכל $i=1,2,3,\dots$.

(a) הוכיחו כי אם $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ אזי
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

(b) הוכיחו כי אם $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$! $\mu(A_1)<\infty$ אזי
$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$$
האם טענה נכונה בלי הנחה $\mu(A_1)<\infty$?

שאלה 7 נסמן על ידי μ מידת Lebesgue ב $\mathbb{R}$.

(a) תנו דוגמה של קבוצה $A\subset\mathbb{R}$ כך ש: A לא חסומה ! $\mu(A)=1$

(b) תנו דוגמה של קבוצה קומפקטית $A\subset\mathbb{R}$ בעוצמה $2^{\aleph_0}$! $\mu(A)=0$

(c) תנו דוגמה של קבוצה קומפקטית $A\subset\mathbb{R}$ בעוצמה $2^{\aleph_0}$ כך ש: A לא מכילה אף קטע ! $0<\mu(A)$.

שאלה 8 נסמן על ידי μ מידת Lebesgue ב $\mathbb{R}$.
הוכיחו כי שקולים התנאים הבאים:

(a) A מדידה לפי לבג ;

(b) לכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצה פתוחה $A\subset U$ כך ש: $\mu(U\setminus A)<\varepsilon$

(c) לכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצה סגורה $F\subset A$ כך ש: $\mu(A\setminus F)<\varepsilon$

שאלה 9 נזכיר כי קבוצה A נקראת G_δ אם $A=\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ וכל U_n קבוצה פתוחה.

קבוצה A נקראת F_σ אם $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ וכל F_n קבוצה סגורה.

הוכיחו כי תנאים הבאים שקולים

(a) A מדידה לפי לבג;

(b) $A=G\setminus N$, כאשר G היא קבוצה G_δ ו- $\mu(N)=0$;

(c) $A=F\cup N$, כאשר F היא קבוצה F_σ ו- $\mu(N)=0$.

שאלה 10 תהי $A\subset\mathbb{R}$ קבוצה מדידה לפי לבג. הוכיחו כי קבוצה $A+x$ היא גם מדידה ו- $\mu(A+x)=\mu(A)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

הערה: $A+x=\{a+x : a\in A\}\subset\mathbb{R}$.