יסודות האנליזה להנדסת חשמל – עבודה 2

שאלה 1:

לכל $\varepsilon > 0$ ו-$x_0 > 0$, הכדור $B(x_0, \varepsilon)$ מכיל נקודה מ-A (למשל, $\left(x_0, \sin\left(\frac{1}{x_0}\right)\right)$) ונקודה לא ב-$A$ (למשל $\left(x_0, \sin\left(\frac{1}{x_0}\right) + \frac{\varepsilon}{2}\right)$). כלומר $B(x_0, \varepsilon) \not\subset A$ ולכן $\mathrm{int}(A) = \emptyset \neq A$ ו-A לא פתוחה.

לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$x_n \to x_0 > 0$ מתקיים ש-$\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \to \sin\left(\frac{1}{x_0}\right)$ מרציפות $\sin\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)$. כלומר A מכילה את כל נקודות ההצטברות של $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)$ לכל סדרה x_n כמתואר למעלה. עבור סדרות $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$x_n \to 0$, הגבול $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x_n}\right)$ לא קיים ולכן A איננה מכילה את כל הנקודות הגבוליות שלה – A לא סגורה.

לכל $y \in [-1,1]$ ניתן למצוא סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$x_n \to 0$ וגם $\left(x_n, \sin\left(\frac{1}{x_n}\right)\right) \to (0, y)$ (למשל, הסדרה $x_n = (\arcsin y + 2\pi n)^{-1}$). כלומר הוספת $\{0\} \times [-1,1]$ תכניס את כל הגבולות החלקיים של $\sin\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)$.

סה"כ, קיבלנו ש:

$$\mathrm{cl}(A) = A \cup (\{0\} \times [-1,1])$$

שאלה 2:

א. f רציפה על $\mathbb{R}$, לכן לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$x_n \to x_0 \in \mathbb{R}$, מתקיים ש-$f(x_n) \to f(x_0)$ לכל x_0. כלומר, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(x_n, f(x_n))\}_{n=1}^{\infty} \to (x_0, f(x_0)) = y_0$. במילים אחרות, Γ מכילה את כל הנקודות הגבוליות שלה, ולכן Γ סגורה.

ב. נתבונן בפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

לכל $x > 0$ הפונקציה רציפה ולכן, בדומה לסעיף א', הגרף שלה הוא קבוצה סגורה. באופן דומה, לכל $x < 0$ הגרף הוא קבוצה סגורה. הנקודה $(0,0)$ נקודה בודדת ולכן בפרט קבוצה סגורה. הגרף של $f(x)$ קבוצה סגורה כאיחוד סופי של קבוצות סגורות.

מצאנו פונקציה שהגרף שלה הוא קבוצה סגורה ב $\mathbb{R}^2$, אך איננה רציפה על הישר $\mathbb{R}$.

שאלה 3:

נשים לב: $\rho(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\} = d(x, x) = 0 \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}:$

ולכן $A = \{x \in A : \rho(x, A) = 0\}$ לפי הגדרה. מצד שני,

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \backslash \boldsymbol{A}: \quad \rho(x, A) = 0 \Leftrightarrow \inf\{d(x, y) : y \in A\} = 0$$

נזכור שמתכונת אינפימום: $\forall \epsilon > 0, \exists a \in A: \ d(x, a) < 0 + \epsilon$. במילים אחרות: $\forall \epsilon > 0: B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

נזכור כי $x \in X \backslash A$, ולכן גם $\forall \epsilon > 0: B(x, \epsilon) \cap X \backslash A \neq \emptyset$. כלומר:

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \backslash \boldsymbol{A}: \quad \rho(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{bd}(A)$$

לסיכום: $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{bd}(A) \cup A = \{x \in X : \rho(x, A) = 0\}$

שאלה 4:

בעמוד אחרון

שאלה 5:

א. נבדוק האם האקסיומות של מטריקה מתקיימות עבור $d(x,y)=|arctg(x)-arctg(y)|$ לכל $x,y\in X=\mathbb{R}$:

אי שליליות – מכיוון שהפונקציה היא ערך מוחלט הערכים המתקבלים הם אי שליליים.

מרחק עצמי 0 – קל לראות שלכל $x=y$ נקבל $d(x,y)=0$. כמו כן, הפונקציה $arctg$ היא ההופכית של tan, ולכן בפרט היא פונקציה חח"ע. מכאן ש $x=y \Leftrightarrow arctg(x)=arctg(y)$.

סימטריה - $d(x,y)=|arctg(x)-arctg(y)|=|arctg(y)-arctg(x)|=d(y,x)$.

אי שוויון המשולש – $\forall x,y,z\in X$:

$$d(x,z)=|arctg(x)-arctg(z)|=|arctg(x)-arctg(y)+arctg(y)-arctg(z)|\le$$
$$|arctg(x)-arctg(y)|+|arctg(y)-arctg(z)|\le d(x,y)+d(y,z)$$

כל האקסיומות מתקיימות ולכן $d(x,y)$ הינה מטריקה על X.

ב. נתבונן בסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=n$. לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>n_0$ מתקיים ש: $\left|arctg\, n-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. כעת, עבור $m,n>n_0$:

$$d(x_n,x_m)=|arctg\, n-arctg\, m|=\left|arctg\, n-\frac{\pi}{2}-arctg\, m+\frac{\pi}{2}\right|$$
$$\le\left|arctg\, n-\frac{\pi}{2}\right|+\left|arctg\, m-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ולכן x_n סדרת קושי. אולם, הסדרה לא מתכנסת ולכן המטריקה איננה שלמה.

שאלה 6:

נראה שסדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי. ניקח $n < m \in \mathbb{N}$:

$$d(f_n, f_m) = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx$$

נשים לב שערכי הפונקציות משתנים בהתאם לערכי x בקטע $[-1,1]$, ולכן נחשב את ערכי האינטגרל בכל אחד מהם:

$$x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]: \int_{\frac{1}{n}}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} |1 - 1|\, dx = 0$$

$$x \in \left[\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right]: \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} |nx - 1|\, dx = \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} (1 - nx)\, dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} - \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

$$x \in \left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right]: \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} |nx - mx|\, dx = \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} (m - n)x\, dx = 0$$

$$x \in \left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{m}\right]: \int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{m}} |nx - (-1)|\, dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{m}} (nx + 1)\, dx = -\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{n}{2}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right]: \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} |-1 - (-1)|\, dx = 0$$

נבצע סכימה ונקבל:

$$d(f_n, f_m) = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx = \frac{2}{n} - \frac{2}{m} < \frac{2}{n}$$

עבור $n_0 = \frac{2}{\epsilon}$, מתקיים:

$$\forall \epsilon > 0, \forall m, n: m > n > n_0: d(f_n, f_m) < \epsilon$$

כלומר סדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי. נשים לב כי:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

ו $f(x) \notin C[-1,1]$ ומכאן שהמטריקה איננה שלמה.

שאלה 7:

א. נתבונן בתנאי Lipschitz:

$$\exists K > 0\ \forall x_1, x_2 \in X: d_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) \le K \cdot d_X(x_1, x_2)$$

בפרט, התנאי מתקיים לכל x_1, x_2 כך ש- $d_X(x_1, x_2) < \frac{\varepsilon}{K} = \delta$. נתבונן במרחק בין התמונות שלהם:

$$d_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) \le K \cdot d_X(x_1, x_2) < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

כלומר, מצאנו ש-f רציפה במידה שווה.

ב. ניעזר בשאלה 5 מעבודה 1 (נציב $z = p$):

$$|f(x) - f(y)| = |d(p, x) - d(p, y)| \le d(x, y)$$

לכל x, y. בפרט, עבור x, y כך ש-$d(x, y) < \delta = \varepsilon$, נקבל ש-$f$ רציפה במידה שווה (במובן של חדו"א 1).

שאלה 8:

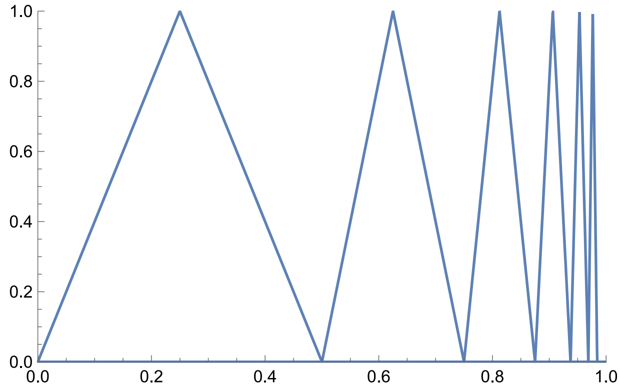
הכדור הנתון $\bar{B}$ הוא כדור סגור סביב פונקצית ה-**0**. נראה שהוא לא קומפקטי. נסמן $a_n = 1 - 2^{-n}$. נגדיר משולשים עם גובה 1, בסיס באורך מתכווץ (ו-0 מחוץ לבסיס), ולא חופפים באופן הבא:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_{n-1}}{\frac{a_n + a_{n-1}}{2} - a_{n-1}}, & a_{n-1} \le x \le \dfrac{a_n + a_{n-1}}{2} \\ \dfrac{-x + a_n}{a_n - \frac{a_n + a_{n-1}}{2}}, & \dfrac{a_n + a_{n-1}}{2} \le x \le a_n \\ 0, & else \end{cases}$$

מבניית המשולשים, $d(f_n(x), \mathbf{0}) = 1$ לכל n, כלומר $f_n(x) \in \bar{B}$. כעת נבחין שלכל $n \ne m$:

$$d\big(f_n(x), f_m(x)\big) = \max_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| = 1$$

כלומר זאת איננה סדרת קושי, ובפרט גם כל תת-סדרה שלה. כלומר אין ל-$f_n(x)$ תת-סדרה מתכנסת, ולכן לא מתקיימת תכונת *BW*.



שאלה 9:

תחילה, נוכיח למת עזר:

<u>למה:</u> אם תת-סדרה של סדרת קושי מתכנסת, אז הסדרה המקורית מתכנסת, ולאותו הגבול של תת-הסדרה.

<u>הוכחה:</u> תהא $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי, כלומר:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ \forall m, n > n_0\ d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

נתון כי לסדרה קיימת תת-סדרה מתכנסת, $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. נסמן את הגבול שלה x_0. מכיוון שהיא מתכנסת:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}: \forall k > k_0\ \ d\left(x_{n_k}, x_0\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

נבדוק כיצד הסדרה המקורית מתקרבת ל-x_0. לשם כך נתבונן ב-$n > N = \max\{n_{k_0}, n_0\} + 1$:

$$d(x_n, x) \le d(x_n, x_N) + d(x_N, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כלומר $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$.

(X, d) מרחב מטרי קומפקטי, לכן מתקיימת תכונת BW לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. בפרט, עבור x_n שהיא סדרת קושי. סדרת קושי עם תת-סדרה מתכנסת היא סדרה מתכנסת (לפי הלמה), והגבול שלה הוא הגבול (היחיד) של תת-הסדרה. סה"כ, כל סדרות קושי מתכנסות ולכן d מטריקה שלמה.

שאלה 10:

א. נשים לב כי לכל סדרה $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset f(K)$ קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ כך ש $f(x_n) = y_n$ כי הפונקציה היא על. בנוסף, נתון כי $K \subset X$ קומפקטי. כלומר, מתקיימת תכונת BW: לכל סדרה $K \supset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ קיימת תת סדרה מתכנסת $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \in K$.
הפונקציה רציפה ולכן $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) \in f(K)$. הראינו כי לכל $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset f(K)$ קיימת תת סדרה מתכנסת $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) \in f(K)$, ולכן $f(K)$ קבוצה קומפקטית.

ב. A חסומה, לכן קיימים $r > 0$ ו-x_0 כך ש-$A \subset \bar{B}(x_0, r)$. $\bar{B}(x_0, r)$ קומפקטי מעל $\mathbb{R}^n$, ולכן מסעיף א' $f\left(\bar{B}(x_0, r)\right)$ קומפקטי. כלומר, התמונה חסומה וסגורה. בפרט $f(A) \subset f\left(\bar{B}(x_0, r)\right)$ חסומה.

שאלה 4

(א) קבוצה של מספרים רציונליים Q צפופה ב $\mathbb{R}^1$.
כמו כן קבוצה $Q^n \subset \mathbb{R}^n$ צפופה ב $\mathbb{R}^n$ כי
בכל קוביה פתוחה $\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i) \subset \mathbb{R}^n$ יש נקודה
$(x_1,x_2,\dots,x_n) \in Q^n$.
Q קבוצה בת-מניה, לכן Q^n גם בת-מניה.

(ב) אם מרחב (X,d) ספרבילי, קבוצה $A \subseteq X$
בת-מניה צפופה ב X אז ניקח אוסף β של כדורים
פתוחים

$$B = \{B(a,\tfrac{1}{n}) : a\in A,\ n\in \mathbb{N}\}$$

זו אוסף בן-מניה. נראה שהוא בסיס בשביל X.
תהי $V\subseteq X$ קבוצה פתוחה כלשהי ו $x\in V$.
אז יש ε כך ש $B(x,\varepsilon)\subset V$.
ניקח $n\in \mathbb{N}$ כך ש $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$. נבחר נקודה $a\in A$
כך ש $d(x,a)<\frac{1}{2n}$ ואז
$x\in B(a,\frac{1}{2n}) \subset B(x,\varepsilon)\subset V$.
$B(a,\frac{1}{2n})\in B$.

הכיוון ההפוך. אם $B=\{U_n : n\in \mathbb{N}\}$ זו בסיס בן-מניה
אז לכל $n\in \mathbb{N}$ נקבע נקודה $a_n\in U_n$.
אז $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ קבוצה בת-מניה וצפופה ב X.