יסודות האנליזה להנדסת חשמל – עבודה 1

שאלה 1:

תחילה, נגדיר פונקציה מ-A ל-$A \cup B$ באופן הבא: $\forall a \in A,\ \varphi_1(a) = a$. זאת העתקת הזהות ולכן היא ϕ_1 חח"ע. לכן $|A| \leq |A \cup B|$.

כעת, נגדיר פונקציה מ-$A \cup B$ ל-A. מכיוון ש-A קבוצה אינסופית כלשהי, קיימת לה תת-קבוצה אינסופית בת-מניה (בניה בצורת אינדוקטיבית). נסמן תת קבוצה זו באמצעות A':

$$A \supset A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

B בת -מניה, לכן ניתן לרשום:

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$$

הפונקציה מ-$A \cup B$ ל-A תוגדר באופן הבא:

$$\forall a \in A \cup B, \qquad \varphi_2(a) = \begin{cases} a & a \in A, a \notin A', a \notin B \\ a_{2n} & a = a_n \in A', a \notin B \\ a_{2n-1} & a = b_n \in B \end{cases}$$

פונקציה זו היא למעשה העתקת הזהות עבור 3 קבוצות <u>זרות</u>. כלומר היא חח"ע ו-$|A \cup B| \leq |A|$. סה"כ, מצאנו ש-$|A| \leq |A \cup B|$ וגם ש-$|A \cup B| \leq |A|$ ולכן $|A| = |A \cup B|$ ממשפט Cantor-Bernstein-Schröder.

שאלה 2:

לא קיימת פונקציה רציפה מהקטע הסגור $[0,1]$ ל-$\mathbb{R}$. פונקציות רציפות מעתיקות קבוצות קומפקטיות (קבוצות סגורות שניתן לחסום בכדור עם רדיוס סופי) לקבוצות קומפקטיות [משפט מהקורס חדו"א וקטורי], ולכן לא קיימת פונקציה רציפה המעתיקה את הקטע הסגור $[0,1]$ (קבוצה קומפקטית) ל-$\mathbb{R}$ (שאיננה קומפקטית).

נבנה העתקה לא רציפה במקום. נתחיל בהעתקה רציפה מ-$(0,1)$ ל- $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in (0,1), \qquad f(x) = \begin{cases} \ln(2x), & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ -\ln\big(2 \cdot (1-x)\big), & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

עבור הקטע $\left(0, \frac{1}{2}\right]$, הפונקציה הפיכה (חח"ע ועל). עבור הקטע $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ הפונקציה הפיכה גם כן, ולכן סה"כ הפוקנציה הפיכה. גבולות הפונקציה בנקודה $x = \frac{1}{2}$:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} -\ln\big(2 \cdot (1-x)\big) = -\ln\left(2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right) = 0$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \ln(2x) = \ln\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = 0$$

שתי הגבולות החד-צדדים קיימים וזהים, ולכן הפונקציה גם רציפה.

נבנה העתקה מ-$(0,1)$ ל-$[0,1]$ באופן הבא: ניקח את הסדרה $x_n = \frac{1}{n}$ ונסמן את איבריה בקבוצה X. נבנה באמצעות X העתקה:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = x_1 \\ 1, & x = x_2 \\ x_{n-2}, & x = x_n \in X, n \geq 3 \\ x, & x \in (0,1)\backslash X \end{cases}$$

בדומה למלון הילברט, הפונקציה הנ"ל הפיכה.

הפונקציה שאנחנו מציעים לפתרון התרגיל היא $\phi(x) = f\left(g^{-1}(x)\right)$. נשים לב שהפונקציה $\phi(x)$ <u>איננה רציפה</u> בקצוות הקטע, כלומר בנקודות $x = 0,1$.

שאלה 3:

נניח בשלילה כי לכל $r \in \mathbb{R}$ מתקיים $A \cap (A + r) \neq \emptyset$. מכיוון ש-$A \cap (A + r) \neq \emptyset$, לכל r קיימים $a, b \in A$ כך ש-$a = b + r$. כלומר, $r = a - b$. נתבונן בהעתקה הבאה:

$$\phi: A \times A \to \mathbb{R}$$

המוגדרת ע"י $\phi(a, b) = a - b$. מהנחת השלילה זאת פונקציה על, ולכן $|\mathbb{R}| \leq |A \times A|$. אולם, מתקיים $|A \times A| = \aleph_0$ ולכן $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c} \leq \aleph_0$, סתירה.

שאלה 4:

<u>סקיצת הוכחה:</u> ההוכחה מחולקת ל-2 שלבים:

1. (להעזר ברמז) להראות שממונוטוניות f לא יתכנו נקודות אי רציפות שאינן מהסוג הראשון ("קפיצה")
2. נעזר בעובדה הנ"ל וצפיפות הרציונליים על מנת לבנות העתקה מנקודות אי הרציפות של f לתת-קבוצה של $\mathbb{Q}$ באמצעות בניית סדרה (אולי אינסופית) המתאימה את ערכי x בהן יש קפיצה למספר רציונלי כלשהו. מכאן מספר נקודות אי הרציפות הוא לכל היותר העוצמה של $\mathbb{Q}$, היא $\aleph_0$.

<u>הוכחה:</u> באי הגבלת הכלליות, f עולה (אחרת נגדיר $g = -f$ עולה). המקרה עבור f קבועה טריוויאלי.
תחילה, נבדוק איזה סוגי אי רציפות אפשריים עבור f:

1. **סליקה** – נניח בשלילה שקיימת נקודת אי רציפות סליקה ב-$x = x_0$. במצב זה, ישנם 2 מקרים עבור $\epsilon > 0$ קטן מספיק:
   a. $f(x_0) > f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon)$
   b. $f(x_0) < f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon)$

   בשני המקרים f איננה מונוטונית - סתירה.
2. **סוג שני** – נניח בשלילה שקיימת נקודת אי רציפות מסוג שני ב-$x = x_0$. כלומר, לפחות אחד מהגבולות $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ או $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ איננו קיים. באי הגבלת הכלליות, הגבול $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ לא קיים.
   תהא $x_n \to x_0$ (מהכיוון השלילי). נסמן: $M = \limsup_{n \to \infty} f(x_n)$ ובאופן דומה נסמן $m = \liminf_{n \to \infty} f(x_n)$.
   מכיוון שהגבול $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$ לא קיים, $m < M$. ניקח 2 תתי-סדרות של x_n, $y_n = \{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ ו-$z_n = \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ כך ש-$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = M$ ו-$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = m$. מההתכנסות שלהן נסיק כי קיימים $n_1 < n_2 < n_3$ כך ש-$f(z_{n_1}), f(z_{n_3}) < f(y_{n_2})$. כלומר f איננה מונוטונית - סתירה.

לכן בהכרח נקודות אי הרציפות של f הן מהסוג הראשון. נסמן את כל נקודות אי הרציפות של f בקבוצה $DisCo(f)$. אם $DisCo(f)=\emptyset$, אז הטענה נכונה. אחרת, קיים $d_1\in DisCo(f)$ כך ש-$f(d_1^-)\neq f(d_1^+)$.
נסמן $m_1=\min\{f(d_1^-),f(d_1^+)\}$ ו-$M_1=\max\{f(d_1^-),f(d_1^+)\}$. נשים לב ש-$M_1>m_1$ ולכן, מצפיפות הרציונליים, קיים $q_1\in(m_1,M_1)\cap\mathbb{Q}$. את q_1 נכניס לקבוצה Q.
נתבונן בקבוצה $DisCo(f)\backslash\{d_1\}$ אם היא ריקה סיימנו והטענה נכונה. אחרת, נחזור על התהליך עבור כלשהו $d_2\in DisCo(f)\backslash\{d_1\}$ ונמצא עבורו $q_2\in(m_2,M_2)\cap\mathbb{Q}$ כך ש-$q_2\notin Q$ (m_2 ו-M_2 מוגדרים בדומה למקודם והקיום של q_2 נתון ע"י צפיפות הרציונליים).

ישנם 2 מקרים אפשריים להמשך התהליך המתואר בהתאם למספר נקודות אי הרציפות:

1. התהליך יסתיים כי מספר נקודות אי הרציפות של f סופי. לכן בהכרח $|DisCo(f)|\le\aleph_0$.
2. התהליך לא יסתיים כי ל-f אינסוף נקודות אי רציפות. באמצעות הבנייה הנ"ל, ניתן לבנות פונקציה
$$\phi: DisCo(f)\to Q\subset\mathbb{Q}$$
המוגדרת ע"י $\phi(d_i)=q_i$. מאופן הבניה של Q, זאת העתקה חח"ע ועל ולכן:
$$|DisCo(f)|=|Q|\le|\mathbb{Q}|=\aleph_0$$

בשני המקרים $|DisCo(f)|\le\aleph_0$, ולכן מספר נקודות אי הרציפות של f הוא לכל היותר בר-מניה.

שאלה 5:

נחלק למקרים: מקרה ראשון: $d(x,z)\ge d(z,y)$

$$d(x,y)\ge|d(x,z)-d(z,y)|\Leftrightarrow d(x,y)\ge d(x,z)-\ d(z,y)$$

$$\Leftrightarrow d(x,y)+\ d(z,y)\ge d(x,z)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} d(x,y)+\ d(y,z)\ge d(x,z)$$

כאשר (1) נובע מתכונת סימטריות של מטריקה, והביטוי האחרון מתקיים מכיוון שזהו אי-שוויון המשולש במטריקה.

מקרה שני: $d(x,z)<d(z,y)$

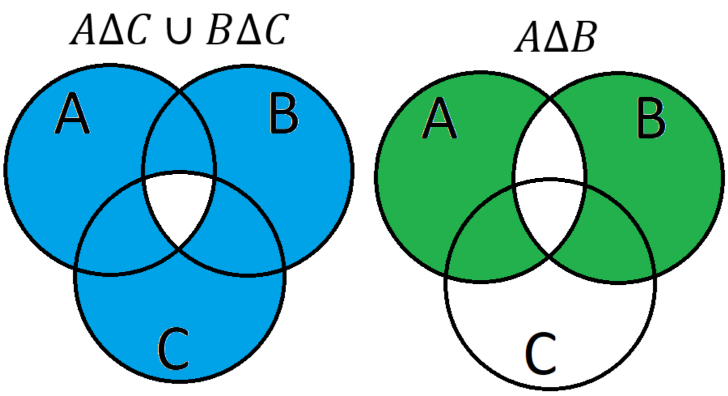
$$\begin{aligned}d(x,y)\ge|d(x,z)-d(z,y)|&\Leftrightarrow d(x,y)\ge -d(x,z)\ +\ d(z,y)\Leftrightarrow -d(z,y)\\&\ge -d(x,z)-d(x,y)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} d(x,z)+\ d(x,y)\ge d(z,y)\overset{(2)}{\Leftrightarrow} d(z,x)+\ d(x,y)\\&\ge d(z,y)\end{aligned}$$

כאשר (1) זה הכפלה ב--1, ו-(2) נובע מסימטריות של מטריקה. הביטוי האחרון מתקיים מכיוון שזהו אי שוויון המשולש במטריקה. מצאנו שאי השוויון הרצוי מתקיים בשני המקרים לכל $x,y,z\in X$.

שאלה 6:

נבדוק האם האקסיומות של מטריקה מתקיימות לכל $A,B\in X=\mathcal{P}(E)$, כאשר E קבוצה סופית, עבור הפונקציה $d(A,B)=|A\Delta B|$:

1. **אי-שליליות** – הפונקציה מוגדרת כעוצמה של קבוצות סופיות ולכן היא אי שלילית.
2. **מרחק עצמי 0** – אם $A=B$ אז מהגדרת הפרש סימטרי, $d(A,B)=0$. אם $d(A,B)=0$ אז בהכרח $A=B$ (אחרת או ש-$B\backslash A\neq\emptyset$ או ש-$A\backslash B\neq\emptyset$. בפרט $A\Delta B\neq\emptyset$ ו-$d(A,B)>0$).
3. **סימטריה** – $d(A,B)=|(A\backslash B)\cup(B\backslash A)|=|(B\backslash A)\cup(A\backslash B)|=d(B,A)$
4. **אי שוויון המשולש** – נתבונן בדיאגרמות וון הבאות:



כלומר, $(A\Delta C) \cup (B\Delta C) = (A\Delta B) \cup [(C\backslash A) \cup (C\backslash B)]$. מכיוון שכל הקבוצות סופיות, מתקיים $|A| \geq |A \cup B| \geq |A| + |B|$. כלומר, $|(A\Delta B) \cup [(C\backslash A) \cup (C\backslash B)]| \geq |A\Delta B| = d(A,B)$ וגם מתקיים $|(A\Delta C) \cup (B\Delta C)| \geq |A\Delta C| + |B\Delta C| = d(A,C) + d(B,C)$. סה"כ:

$$d(A,C) + d(C,B) = |A\Delta C| + |C\Delta B| \geq |A\Delta B| = d(A,B)$$

כל האקסיומות מתקיימות ולכן $d(A,B)$ היא מטריקה על X.

שאלה 7:

א. **אי-שליליות** – על מנת שתתקיים עבור $d' = C \cdot d$ נקבל אילוץ $\boldsymbol{C \geq 0}$.
מרחק עצמי 0 – $d'(x,y) = 0 \Leftrightarrow C \cdot d(x,y) = 0$. על מנת שיתקיים רק עבור $x = y$ נקבל את האילוץ $\boldsymbol{C \neq 0}$.
סימטריה – $d'(x,y) = d'(y,x) \Leftrightarrow C \cdot d(x,y) = C \cdot d(y,x)$ מתקיים לכל C.
אי שוויון המשולש – לכל $x,y,z \in X$:
$d'(x,y) + d'(y,z) \geq d'(x,z) \Leftrightarrow C \cdot d(x,y) + C \cdot d(y,z) \geq C \cdot d(x,z)$ נקבל אילוץ $\boldsymbol{C \geq 0}$.
נאחד את האילוצים ונקבל ש $d' = C \cdot d$ מטריקה לכל $C > 0$.

ב. **אי-שליליות** – על מנת שתתקיים עבור $d' = C + d$ נקבל אילוץ $\boldsymbol{C \geq -d(x,y)}$ לכל $\boldsymbol{x,y \in X}$.
מרחק עצמי 0 – $d'(x,x) = 0 \Leftrightarrow C + d(x,x) = 0 \Leftrightarrow C = 0$ קיבלנו אילוץ $\boldsymbol{C = 0}$.
סימטריה – $d'(x,y) = d'(y,x) \Leftrightarrow C + d(x,y) = C + d(y,x)$ מתקיים לכל C.
אי שוויון המשולש – לכל $x,y,z \in X$:
$d'(x,y) + d'(y,z) \geq d'(x,z) \Leftrightarrow C + d(x,y) + C + d(y,z) \geq C + d(x,z)$ מתקיים לכל C.
נאחד את האילוצים ונקבל ש $d' = C + d$ מטריקה רק עבור $C = 0$.

שאלה 8:

א. **אי-שליליות** – $d_1(x,y), d_2(x,y) \geq 0$ לכל $x,y \in X$. לכן, $d'(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y) \geq 0$.
מרחק עצמי 0 – $d'(x,y) = 0 \Leftrightarrow d_1(x,y) + d_2(x,y) = 0$, וזה מתקיים רק עבור $x = y$ מתכונת המטריקה של d_1, d_2.
סימטריה – $d'(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y) = d_1(y,x) + d_2(y,x) = d'(y,x)$, מתכונות המטריקה של d_1, d_2.
אי שוויון המשולש – לכל $x,y,z \in X$:

$$d'(x,y) + d'(y,z) = d_1(x,y) + d_2(x,y) + d_1(y,z) + d_2(y,z)$$
$$= [d_1(x,y) + d_1(y,z)] + [d_2(x,y) + d_2(y,z)] \geq d_1(x,z) + d_2(x,z) = d'(x,z)$$

כל האקסיומות מתקיימות לכן $d' = d_1 + d_2$ היא מטריקה.

ב. **אי-שליליות** – בדומה לקודם, $d'(x,y)=\max\{d_1(x,y),d_2(x,y)\}\geq 0$ לכל $x,y\in X$.
מרחק עצמי 0 – $\max\{d_1(x,y),d_2(x,y)\}=0 \Leftrightarrow d'(x,y)=0$, וזה מתקיים רק עבור $x=y$ מתכונות המטריקה של d_1,d_2.
סימטריה – $d'(x,y)=\max\{d_1(x,y),d_2(x,y)\}=\max\{d_1(y,x),d_2(y,x)\}=d'(y,x)$
אי שוויון המשולש – לכל $x,y,z\in X$:

$$d'(x,z)=\max\{d_1(x,z),d_2(x,z)\}$$

נחלק למקרים; מקרה ראשון: $d'(x,z)=d_1(x,z)$, בפרט מתקיים:

$$d'(x,z)=d_1(x,z)\overset{(i)}{\leq} d_1(x,y)+d_1(y,z)$$
$$\leq \max\{d_1(x,y),d_2(x,y)\}+\max\{d_1(y,z),d_2(x,z)\}=d'(x,y)+d'(y,z)$$

כאשר *(i)* נובע מאי שוויון המשולש במטריקה d_1.
המקרה בו $d'(x,z)=d_2(x,z)$, דומה. אי שוויון המשולש מתקיים בשני המקרים, כלומר כל האקסיומות מתקיימות ולכן $d'=\max\{d_1,d_2\}$ היא מטריקה על X.

ג. $d'=\min\{d_1,d_2\}$ איננה בהכרח מטריקה. לדוגמה, אם נגדיר מרחב: $X=\mathbb{R}^2$ ושתי מטריקות:

$$d_1(a,b)=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$$
$$d_2(a,b)=\frac{1}{2}\cdot|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

נשים לב ש-$|x_1-x_2|$ היא מטריקה של קטע, והראנו בשאלה 7 שכפל בקבוע חיובי שומר על תכונות מטריקה לכן $\frac{1}{2}\cdot|x_1-x_2|$ מטריקה בפני עצמה. בסעיף א' של שאלה זו הראינו שסכום שני מטריקות הוא מטריקה ולכן d_2 היא מטריקה.
ניקח 3 נקודות: $a=(1,0),b=(2,0),c=(3,1)\in X$. נחשב:

$$d'(a,b)=\min\{d_1(a,b),d_2(a,b)\}=\min\left\{\max\{|2-1|,|0-0|\},\frac{1}{2}\cdot|2-1|+|0-0|\right\}$$
$$=\min\left\{1,\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$$
$$d'(b,c)=\min\{d_1(b,c),d_2(b,c)\}=\min\left\{\max\{|3-2|,|1-0|\},\frac{1}{2}\cdot|3-2|+|1-0|\right\}$$
$$=\min\left\{1,\frac{3}{2}\right\}=1$$
$$d'(a,c)=\min\{d_1(a,c),d_2(a,c)\}=\min\left\{\max\{|3-1|,|1-0|\},\frac{1}{2}\cdot|3-1|+|1-0|\right\}$$
$$=\min\{2,2\}=2$$

קיבלנו $d'(a,b)+d'(b,c)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}<2=d'(a,c)$, כלומר אי שוויון המשולש לא מתקיים.

שאלה 9:

נתון ש-$x_n\to x$ במרחב המטרי (X,d). לכן, לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים ש-$d(x_n,x)<\varepsilon$.
ניעזר בטענה משאלה 5 לפיה מתקיים:

$$|d(x_n,y)-d(x,y)|=|d(x_n,y)-d(y,x)|\leq d(x_n,x)$$

לכל n. כלומר, לכל $n>n_0$ מתקיים ש- $|d(x_n,y)-d(x,y)|\leq d(x_n,x)<\varepsilon$

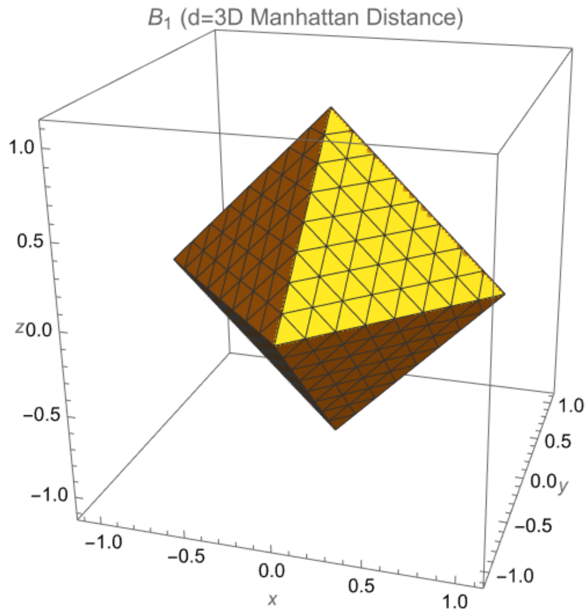
לכן $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y)=d(x,y)$ לפי הגדרת הגבול (של חדו"א 1).

שאלה 10:

נכתוב במפורש את הכדורים השונים:

$$B_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| \le 1\}$$

זהו יהלום (מלא) ב-$\mathbb{R}^3$:



$$B_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|, |y|, |z|\} \le 1\}$$

זוהי קובייה (מלאה) ב-$\mathbb{R}^3$: