תרגיל 8 באלגברה 2

1) הוכיחו או הפריכו:

(א) לכל אופרטור לינארי $T: V \to V$ קיים לפחות וקטור עצמי אחד.

(ב) אם מטריצה משולשת נתנת ללכסון, אז היא אלכסונית.

2) יהא $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ האופרטור הלינארי כך ש־

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

יהא $W = \mathrm{Ker}(T - 2I)$. הוכיחו כי אין ל־$\mathbb{R}^3$ תת־מרחב T אינוריאנטי U כך ש־ $\mathbb{R}^3 = W \oplus U$.

3) יהא $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ אופרטור לינארי המיוצג בבסיס הסטנדרטי ע"י המטריצה

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

חשבו את הפרוק הפרימארי של T כדלקמן:

(א) הציגו את הפולינום המינימלי של T כ־$m_T(x) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i}$ כאשר $p_1, \ldots, p_k$ פולינומים אי־פריקים מעל $\mathbb{R}$ ו־$r_1, \ldots, r_k \geq 1$ טבעיים.

(ב) לכל $1 \leq i \leq k$ יהא $W_i = \mathrm{Ker}\big(p_i^{e_i}(T)\big)$. מצאו בסיס $\mathcal{B}_i$ ל־W_i ואת המטריצה $A_i = [T|_{W_i}]_{\mathcal{B}_i}$.

(ג) עבור $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$, מצאו את $[T]_{\mathcal{B}}$.

4) כמו בשאלה הקודמת עבור המטריצות הבאות:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5) יהא $T: V \to V$ אופרטור לינארי על מרחב וקטורי ממימד סופי, ויהיו

$$m_T(x) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}, \quad W_i = \mathrm{Ker}\big(p_i^{e_i}(T)\big)$$

כבשאלה 4. הראו כי אם U תת־מרחב אינוארינטי־T, אז
$$U = (U \cap W_1) \oplus \ldots \oplus (U \cap W_r)$$

6) נגדיר "פולינום מינימלי של וקטור v ביחס לאופרטור T" להיות פולינום מתוקן ממעלה מינימלית $f(X)$ כך ש־$f(T)(v) = 0$.

(א) הוכיחו קיום ויחידות של הפולינום המינימלי של וקטור v ביחס לאופרטור T.

(ב) הוכיחו כי לכל וקטור v, הפולינום המינימלי של וקטור v ביחס לאופרטור T מחלק את הפולינום המינימלי של T.