תרגיל 7 באלגברה 2

1) מצאו מטריצה מסדר 3×3 עם פולינום מינימלי X^2.

2) יהא T אופרטור לינארי על מרחב וקטורי מממד סופי. הוכיחו כי אם $T^2 = T$ אז T ניתן ללכסון.

3) לשדה F יהיו $V = M_n(F)$, $B \in V$ ו-$T\colon V \to V$ האופרטור המוגדר ע"י $T(A) = BA$. הוכיחו כי הפולינום המינימלי של B הוא הפולינום המינימלי של T. (שימו לב שהמטריצה המייצגת של T לפי כל בסיס היא מסדר $n^2 \times n^2$).

4) יהא V מרחב וקטורי מממד סופי ויהא $T\colon V \to V$ אופרטור לינארי. יהא $W \leq V$ תת-מרחב אינוריאנטי-T של V. נסמן ב-T_W את הצמצום של T ל-W.

(א) הוכיחו כי הפולינום המינימלי של T_W מחלק את הפולינום המינימלי של T.

(ב) הוכיחו כי אם T ניתן ללכסון אז גם T_W ניתן ללכסון.

5) מצאו את הפולינום האופיני של

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

והוכיחו שהוא גם הפולינום המינימלי של A.

6) תהא מטריצת בלוקים. נסמן את הבלוקים $A_1, A_2, \ldots, A_r$. הוכיחו כי הפולינום האופיני של A הינו מכפלת הפולינומים האופיניים של כל אחד מהבלוקים, וכי הפולינום המינימלי של A הינו המכפלה המשותפת המינימ-לית (lcm) שלהם.

7) תהיינה $A, B \in M_n(F)$. הוכיחו או הפריכו:

(א) A, B דומות אם ורק אם יש להן אותו פולינום מינימלי.

(ב) A, B דומות אם ורק אם יש להן אותו פולינום אופיני.

(ג) אם ל-A, B אותו פולינום אופיני ואותו פולינום מינימלי אז הן דומות.

8) הוכיחו או הפריכו: אם מטריצה משולשית עליונה ניתנת ללכסון אז היא אלכסונית.

9) מטריצה $A \in M_n(F)$ נקראת k-נילפוטנטית אם $A^k = 0$ ו-$A^l \neq 0$ לכל $1 \leq l \leq k-1$. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם A הינה k-נילפוטנטית אז $k \leq n$.

(ב) אם A הינה k-נילפוטנטית אז $A + \alpha I_n$ הינה מטריצה הפיכה לכל $0 \neq \alpha \in F$.

(ג) אם A הינה k-נילפוטנטית אז $A + B$ הינה מטריצה הפיכה לכל מטריצה הפיכה B.