תרגיל 6 באלגברה 2

1) תהא A מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$, שאיבריה הינם פולינומים ממע-
לות אפס או אחד. הוכיחו כי $\deg(\det(A)) \leq n$.

2) תהא A מטריצה ריבועית $n \times n$, ויהא f_A הפולינום האפייני של A.
הוכיחו:

(א) f_A פולינום מתוקן ממעלה n.

(ב) המקדם החפשי של f_A הוא $(-1)^n \det(A)$.

(ג) המקדם של x^{n-1} ב-f_A הינו $-\mathrm{Tr}(A)$ (כש-$\mathrm{Tr}(A)$ = העקבה של A).

3) מצאו את הפולינום האפייני של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

בדקו שהמטריצה מאפסת פולינום זה.

4) יהא T אופרטור לינארי על מרחב וקטורי ממימד סופי V, ויהא $W \leq V$
תת-מרחב של V כך ש-$T(W) \subseteq W$. הראו שהפולינום האופיני של הצמצום
$T|_W$ של T ל-W מחלק את הפולינום האפייני של T.

5) תהינה $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. הראו כי ל-AB ול-BA אותו פולינום אפייני.

6) תהא A מטריצה עם פולינום אפייני $(x-1)^n$. מה ניתן לומר על A?

7) מצאו את הפולינום המזערי של המטריצות הבאות:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8) תהא

$$C=\frac{1}{320}\begin{pmatrix} 2394 & -318 & 328 & -984 & -3248 & -680 & 1452 & 3544 \\ 554 & 2002 & 648 & -1944 & -5168 & -1640 & 1932 & 4504 \\ 338 & 474 & 2536 & -2808 & -4336 & 1400 & 444 & 2168 \\ 355 & 495 & 1180 & -1300 & -3560 & 820 & 330 & 1300 \\ 248 & 24 & 96 & -288 & 384 & -160 & 144 & 288 \\ 544 & 32 & 128 & -384 & -768 & 320 & 192 & 384 \\ 522 & 306 & 904 & -1432 & -2224 & -40 & 1036 & -1128 \\ 43 & -41 & -4 & 12 & 24 & 20 & -6 & 1908 \end{pmatrix}$$

הפולינום המזערי של C הוא

$x^7-28x^6+322x^5-1960x^4+6769x^3-13132x^2+13068x-5040$.

מצאו (ללא חישובי דטרמיננטות!) מהו הפולינום האפייני של C.