תרגיל 5 באלגברה 2

1) ב-$V = M_2(\mathbb{Q})$ יהא W התת-מרחב של המטריצות האלכסוניות ויהא $U = \{A \in V \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$.

(א) האם $W \oplus U = V$?

(ב) מצאו תת-מרחבים U_2, U_1 של V כך ש-$W \oplus U_1 = U \oplus U_2 = V$.

2) יהא $W = \mathrm{Span}\{(1,1)\}$ תת-מרחב של $V = \mathbb{Z}_3^2$. מצאו את כל התת-מרחבים U של V המקיימים $V = U \oplus W$.

3) מצאו מרחב וקטורי V ושלושה תת-מרחבים שלו W_1, W_2, W_3, כך שכל שניים מבין התת-מרחבים בלתי-תלויים, אך $\{W_1, W_2, W_3\}$ תלויים.

4) יהא V מרחב וקטורי ממימד סופי, ויהיו $W_1, W_2, \ldots, W_n$ תת-מרחבים שלו כך ש-$V = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ ו-$\dim V = \dim W_1 + \cdots + \dim W_n$. הראו ש-$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$.

5) יהא V מרחב וקטורי ממימד סופי, ויהיו $W_1, W_2, \ldots, W_n$ תת-מרחבים המקיימים $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$. הראו שקיימים תת-מרחבים $U_i \leq W_i$, $i = 1, \ldots n$, כך ש-$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$.

6) יהא T אופרטור לינארי על מרחב ממימד סופי V. נגדיר $R = \mathrm{Im}(T)$, $N = \ker(T)$. הראו ש-N, R בלתי-תלויים אם ורק אם $V = N \oplus R$.

השאלות הבאות הן לפתרון בהתאם להתקדמות בקבוצות השונות.

7) מצאו את הערכים העצמיים ואת המרחבים העצמיים המתאימים של כל אחד מהאופרטורים הלינאריים הבאים כש-$F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$:

(א) $T\colon F^3 \to F^3, \quad T(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z)$

(ב) $S\colon F^2 \to F^2, \quad S(x,y) = (x+y, x-y)$

(ג) $T\colon F^4 \to F^4, \quad T(x,y,z,w) = (y, 2z, 3w, 0)$

(ד) $S\colon \mathbb{Z}_2^4 \to \mathbb{Z}_2^4, \quad S(x,y,z,w) = (x+z, -2x-z, y+w, y-w)$

8) לכל אחת מהמטריצות הבאות מצאו את ערכיהן העצמיים, את המרחבים העצמיים המתאימים, ואם הדבר אפשרי, לכסנו את המטריצות (כלומר

מצאו מטריצה הפיכה Q כך ש-$Q^{-1}A_iQ$ מטריצה אלכסונית).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9) (א) נניח כי $v \in F^n$ וקטור עצמי של המטריצות A ו-B. הראו ש-v הינו וקטור עצמי של כל המטריצות ב-$\mathrm{Span}\{A, B\}$.

(ב) נניח כי $v \in F^n$ וקטור עצמי של מטריצה A המתאים לערך העצמי λ. הראו כי לכל $n \geq 1$, v הינו וקטור עצמי של A^n המתאים לערך העצמי λ^n.

10) הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

(א) למטריצות A, A^T יש אותם ערכים עצמיים.

(ב) למטריצות A, A^T יש אותם וקטורים עצמיים.

11) ל-$A \in M_n(F)$ נגדיר אופרטור לינארי $T_A \colon F^n \to F^n$ על-ידי $T_A(v) = A \cdot v$.

(א) הראו כי המטריצה A ניתנת ללכסון אם ורק אם האופרטור T_A ניתן ללכסון.

(ב) יהיה $T \colon V \to V$ אופרטור לינארי ו-$\mathcal{B}$ בסיס ל-V. הראו כי T ניתן ללכסון אם ורק אם $[T]_B$ ניתנת ללכסון.

(ג) יהיו $Q, A \in M_n(F)$ כש-Q הפיכה. הראו כי $Q^{-1}AQ$ אלכסונית אם ורק אם עמודות Q הן וקטורים עצמיים של A.