

תרגיל 4 באלגברה 2

(1) חלקו עם שארית את $f(x)$ ב- $g(x)$ מעל \mathbb{C} כאשר:

$$f(x) = x^{10} - 2x^9 + 3x^8 - x^2 + 2x - 1, \quad g(x) = x^4 - 1 \quad (\text{א})$$

$$f(x) = x^{17} - x^{10} + 2x^3 - 1, \quad g(x) = x^2 + 1 \quad (\text{ב})$$

(2) מצאו את $\gcd(f(x), g(x))$ מעל \mathbb{C} כאשר:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x + 2, \quad g(x) = x^2 + 3x - 4 \quad (\text{א})$$

$$f(x) = x^6 - x^4 + 3x^3 - 2x + 2, \quad g(x) = x^3 + 2 \quad (\text{ב})$$

(3) פרקו את הפולינומים הבאים למכפלה של גורמים לינאריים מעל \mathbb{C} :

$$f(x) = x^4 - x^2 + 1 \quad (\text{א})$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad (\text{ב})$$

(4) מצאו את כל הפולינומים האי פריקים ממעלה 3 מעל \mathbb{Z}_2 .

(5) הוכיחו כי $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ אינו פריק מעל \mathbb{Z}_2 .

(6) פרקו את הפולינומים הבאים לגורמים לינאריים מעל השדות הנתונים (אם הדבר אפשרי):

$$x^2 + 1 \quad \text{מעל } \mathbb{Z}_5 \quad (\text{א})$$

$$x^3 + 5x^2 + 5 \quad \text{מעל } \mathbb{Z}_{11} \quad (\text{ב})$$

$$x^4 + 1 \quad \text{מעל } \mathbb{Z}_3 \quad (\text{ג})$$

(7) יהא p פולינום מתוקן (=מוני), ויהיו f ו- g פולינומים זרים. הראו כי $\gcd(pf, pg) = p$.

(8) המשפט היסודי של האלגברה: אם f פולינום מרוכב ממעלה גדולה או שווה לאחד, אז קיים מספר מרוכב c כך ש- $f(c) = 0$. בהסתמך על המשפט היסודי של האלגברה, הוכיחו כי ל- $f, g \in \mathbb{C}[x]$ מתקיים $\gcd(f, g) = 1$ אם ורק אם אין ל- f, g שורש משותף.

השאלות הבאות הן לפתרון בהתאם להתקדמות בחומר.

(9) יהא V מרחב וקטורי ממימד סופי, יהא E אופרטור הטלה על V . הוכיחו:
 (א) $v \in \text{Im}(E)$ אם ורק אם $E(v) = v$.

$$V = \text{Im}(E) \oplus \text{Ker}(E) \quad (\text{ב})$$

(ג) לכל $v \in V$, ההצגה היחידה של v כסכום של וקטור מ- $\text{Im}(E)$ ווקטור

$$v = E(v) + (v - E(v))$$

מ- $\text{Ker}(E)$ היא

(10) הראו שאם f פולינום מעל שדה, ו- E אופרטור הטלה, אזי $f(E) = aI + bE$. הציגו את a, b כפונקציות של מקדמי f .