

תרגיל 3 באלגברה 2

(1) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ מעל \mathbb{Q} . חשבו את $f(A)$ עבור הפולינומים $f = X^3 - 1$ ו- $f = X^2 - X + 2$ מעל \mathbb{Q} .

(2) נגדיר אופרטור לינארי T על \mathbb{R}^3 ע"י $T(x, y, z) = (x, z, -2y - z)$. יהא $f = -X^3 + 2 \in \mathbb{R}[X]$. חשבו את $f(T)$.

(3) כמה פולינומים ממעלה קטנה מ-3 מעל \mathbb{Z}_5 מקיימים $f(1) = f(2) = 0$? מצאו את כולם.

(4) הוכיחו את משפט החלוקה עם שארית: יהי F שדה, ויהיו $f, g \in F[X]$ פולינומים כך ש- $g \neq 0$, אזי קיים זוג יחיד של פולינומים, $q, r \in F[X]$ כך ש- $f = gq + r$ וגם $r = 0$ או $\deg(r) < \deg(g)$.

(5) חלקו את הפולינומים הבאים עם שארית, כלומר לכל זוג פולינומים f, g , מצאו את הזוג q, r המתאים (ראו שאלה קודמת):

(א) $f = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 5X + 3$, $g = X + 1$ מעל \mathbb{Q} .

(ב) $f = X^5 + 2X^4 - 3X^3 + X^2 - 1$, $g = X^3 + X + 1$ מעל \mathbb{Z}_7 .

(ג) $f = X^3 + X$, $g = X + 1$ מעל \mathbb{Z}_2 .

(6) יהי F שדה. אופרטור הנגזרת הפורמלית $D: F[X] \rightarrow F[X]$ מוגדר ע"י

$$D\left(\sum_{i=0}^n a_i X^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)a_{i+1} X^i$$

(א) הראו ש- D הוא אופרטור לינארי על $F[X]$.

(ב) הראו שלכל שני פולינומים $f, g \in F[X]$ מתקיים

$$D(fg) = D(f)g + fD(g)$$

(ג) יהא $\alpha \in F$ ויהא $f \in F[X]$. הראו ש- $(X - \alpha)^2$ מחלק את f אם ורק

אם α שורש של f וגם α שורש של $D(f)$.

(7) לכל אחת מקבוצות הפולינומים הבאות ב- $F[X]$ (F שדה כלשהו), קיבעו אם היא מהווה אידיאל. אם כן, מצאו את היוצר של האידיאל.

(א) קבוצת הפולינומים ממעלה קטנה מ- m בצרוף פולינום האפס.

(ב) קבוצת הפולינומים ממעלה גדולה מ- m בצרוף פולינום האפס.

(ג) קבוצת הפולינומים שהמקדם החופשי שלהם הוא אפס.

$$\{f \in F[X] \mid f(1) = 0\} \quad (\text{ד})$$

$$\{f \in F[X] \mid f(1) = 1\} \quad (\text{ה})$$

$$\{f \in F[X] \mid f(0) = f(1)\} \quad (\text{ו})$$

$$\{f \in F[X] \mid f(0) = f(1) = 0\} \quad (\text{ז})$$

(8) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ מעל \mathbb{Q} . מצאו את הפולינום היוצר את האידיאל של הפולינומים f המקיימים $f(A) = 0$.

(9) יהי F שדה סופי. הראו שקיים פולינום אי-פריק $f \in F[X]$ כך ש-
 $\deg(f) = 2$.

הערה: הפולינום ממעלה שניה f הוא פריק אם"ם יש פולינומים ממעלה ראשונה
 $f = g_1 g_2$ כך ש g_1, g_2 .