תרגיל 2 באלגברה 2

1) נתבונן בבסיס $\mathcal{B}=\left(v_1,v_2,v_3\right)$ ל-$V=\mathbb{R}^3$, באשר
$v_1=(2,-1,2),\ v_2=(0,1,1),\ v_3=(1,-1,1)$.

(א) מצאו פונקציונל לינארי f עם $f(v_1)=1,\ f(v_2)=-1,\ f(v_3)=0$.

(ב) חשבו את $\mathrm{Ker}f$.

(ג) חשבו את $\mathcal{B}^*$.

2) במרחב הוקטורי $\mathbb{Q}^4$ מעל $\mathbb{Q}$ יהא $\mathcal{B}=\left(v_1,v_2,v_3,v_4\right)$, באשר
$v_1=(1,0,0,1),\ v_2=(0,1,0,1),\ v_3=(0,0,1,1),\ v_4=(1,2,3,7)$.

(א) בדקו ש-$\mathcal{B}$ בסיס ל-$\mathbb{Q}^4$.

(ב) מצאו את הבסיס הדואלי $\mathcal{B}^*$ ל-$\mathcal{B}$.

(ג) מצאו פונקציונל לינארי f על $\mathbb{Q}^4$ המקיים $f(v_i)=i$ לכל i.

3) יהא $V=F_{\leq 2}[X]$ מרחב הפולינומים ממעלה ≥ 2 עם מקדמים בשדה F בעל מאפיין השונה משתיים. נגדיר פונקציונלים לינאריים L_1,L_2,L_3 על V ע"י $L_i(p)=p(i)$.

(א) הוכיחו כי $\mathcal{B}^*=\left(L_1,L_2,L_3\right)$ הינו בסיס של V^*.

(ב) מצאו בסיס $\mathcal{B}$ ל-V כך ש-$\mathcal{B}^*$ הבסיס הדואלי של $\mathcal{B}$.

4) (א) מצאו את הפולינום מעל $\mathbb{R}$ מן המעלה הנמוכה ביותר המקיים $f(1)=-1$, $f(-1)=1$, $f(2)=2$, $f(-2)=-2$.

(ב) נתון $f\in\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ המקיים $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=4$. האם יתכן ש-$f(0)=0$? האם יתכן $f(0)=1$?

(ג) מצאו פולינום $f\in\mathbb{C}[X]$ המקיים

$$f(1)=f(-1)=i,\ f(i)=f(1+i)=-1,\ f(0)=0 \ .$$

5) יהיה $V=\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ ונגדיר $f_1,f_2,f_3\in V^*$ ע"י

$$f_1(p)=\int_0^1 p(x)dx,\ f_2(p)=\int_0^2 p(x)dx,\ f_3(p)=\int_{-1}^0 p(x)dx$$

הוכיחו כי $\mathcal{B}^*=\{f_1,f_2,f_3\}$ הינו בסיס של V^*. מצאו בסיס ב-V ש-$\mathcal{B}^*$ הינו בסיס דואלי שלו.

6) יהיו V ו־W מרחבים ווקטוריים מעל שדה F ותהא $T : V \to W$ טרנספורמציה לינארית. הטרנספורמציה המוחלפת $T^t : W^* \to V^*$ מוגדרת על ידי הנוסחה $(T^t(g))(v) = g(T(v))$ לכל $g \in W^*$ ו־$v \in V$.

(א) בדקו כי T^t מוגדרת היטב והינה טרנספורמציה לינארית.

(ב) יהיה F שדה ויהיו $V = W = M_n(F)$. נקבע מטריצה $C \in M_n(F)$. נגדיר טרנספורמציה לינארית $T : V \to V$ ע"י $T(A) = AC - CA$ ונגדיר פונקציונל לינארי $f : V \to F$ ע"י $f(A) = \mathrm{Tr}(A)$. חשבו את $T^t(f)$.

(ג) נניח כי V, W ממימד סופי. יהיו $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ בסיסים שלהם, עם בסיסים דואלים $\mathcal{B}^*, \mathcal{C}^*$ של V^*, W^*, בהתאמה. הוכיחו כי $([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})^t = [T^t]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*}$.