<u>תרגיל 1 באלגברה 2</u>

1) האופרטור הלינארי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ מוגדר ע"י פעולתו על אברי בסיס של $\mathbb{R}^3$ כדלקמן:

$T(0,1,1)=(2,-1,1),\ T(2,-1,0)=(1,1,0),\ T(-1,0,0)=(1,-1,1)$.

חשבו את $T(x,y,z),\ T^{-1}(x,y,z)$ ואת $[T]_{\mathcal{E}}$ (= ההצגה המטריציאלית של T ביחס לבסיס הסטנדרטי $\mathcal{E}$ של $\mathbb{R}^3$).

2) מטריצות $A,B\in M_{n\times n}(F)$ מעל שדה F נקראות **דומות** אם קיימת מטריצה הפיכה $P\in M_{n\times n}(F)$ כך ש-$A=P^{-1}BP$.

אופרטורים לינאריים $T_1,T_2\colon V\to V$, כש-V מרחב וקטורי מעל F נקראים **צמודים** אם קיים אופרטור לינארי הפיך $S\colon V\to V$ כך ש $T_1=S^{-1}\circ T_2\circ S$.

יהיה V מרחב ווקטורי ממימד n מעל F. הוכיחו:

(א) מטריצות $A,B\in M_{n\times n}(F)$ הן דומות אם ורק אם קיים אופרטור לינארי $T\colon V\to V$ ובסיסים $\mathcal{D},\mathcal{C}$ של V כך ש-$[T]_{\mathcal{C}}=A$ ו-$[T]_{\mathcal{D}}=B$.

(ב) אופרטורים לינאריים $T_1,T_2\colon V\to V$ הם צמודים אם ורק אם קיימים בסיסים $\mathcal{C},\mathcal{D}$ של V כך ש-$[T_1]_{\mathcal{C}}=[T_2]_{\mathcal{D}}$

3) מצאו אילו מהפונקציות הבאות הינן פונקציונלים לינארים:

(א) פונקציית העקבה $\mathrm{Tr}\colon M_{n\times n}(F)\to F$ המוגדרת למטריצה $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ע"י $\mathrm{Tr}(A)=\sum_{i=1}^n a_{i,i}$ (כאן F שדה).

(ב) פונקציית הדטרמיננטה $\det\colon M_{n\times n}(F)\to F$ (כש-F שדה).

(ג) הפונקציה $\mathrm{Int}\colon C([0,1])\to\mathbb{R}$, כש- $C([0,1])$ הינו המרחב הוקטורי מעל $\mathbb{R}$ של כל הפונקציות הרציפות $g\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, ו-$\mathrm{Int}(g)=\int_0^1 g(t)dt$

4) במרחב $\mathbb{R}^3$ יהיו $v_1=(1,0,1),\ v_2=(0,1,-1),\ v_3=(-1,1,0)$. יהיה f פונקציונל לינארי על $\mathbb{R}$ המקיים $f(v_1)=1,\ f(v_2)=-1, f(v_3)=3$.
חשבו את $f(x,y,z)$ ואת $\mathrm{Ker}(f)$.

5) יהא V מרחב וקטורי מממד סופי. לתת-קבוצה S של V נסמן

$S^0=\{f\in V^*\mid f(u)=0\quad\forall\ u\in S\}$.

(א) מצאו תנאי הכרחי ומספיק לכך ש-$S^0=V^*$ ולכך ש-$S^0=\{0\}$.

(ב) הוכיחו כי אם W_1,W_2 תת-מרחבים של V אז

$$(W_1+W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0 \quad , \quad (W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0 \ .$$

6) יהא $V = \mathbb{R}^n$ ויהא $W = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$.
הוכיחו כי W^0 הינו קבוצת כל הפונקציונלים הלינאריים על V מהצורה $f(x_1,\cdots,x_n) = c\sum_{i=1}^n x_i$, כש-$c \in \mathbb{R}$.