תרגיל 13 באלגברה 2

1) יהיה T האופרטור הלינארי על $\mathbb{C}^2$ המיוצג בבסיס הסטנדרטי על ידי

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

הראו כי T נורמלי ומצאו בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של T.

2) לכל אחת מהמטריצות הבאות A מצאו מטריצה אוניטרית P כך ש-$D = P^{-1}AP$ אלכסונית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

3) מצאו מטריצה מסדר 2×2, A שאינה נורמלית, אך ריבועה נורמלי.

4) יהיה T אופרטור לינארי נורמלי על מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל המרוכבים. הראו כי:

(א) T צמוד לעצמו אם ורק אם כל הערכים העצמיים שלו ממשיים.

(ב) T אוניטרי אם ורק אם לערכיו העצמיים ערך מוחלט 1.

5) יהיה V מרחב המספרים המרוכבים מעל $\mathbb{R}$.

(א) הראו כי הפונקציה $f(x,y) = \mathrm{Re}(x\bar{y})$ מגדירה מכפלה פנימית על V.

(ב) מצאו איזומורפיזם של מרחבי מכפלה פנימית בין V ל $\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית סטנדרטית.

(ג) לכל $z \in V$ נגדיר $T_z(x) = zx$. הראו כי T_z אופרטור לינארי וכי $T_z^* = T_{\bar{z}}$.

(ד) מצאו עבור אילו מספרים מרוכבים z, T_z צמוד לעצמו.

(ה) מצאו עבור אילו מספרים מרוכבים z, T_z אוניטרי.