תרגיל 11 באלגברה 2

1) נגדיר אופרטור לינארי T על $\mathbb{C}^2$ על ידי
$$T(e_1) = (1,-2),\ T(e_2) = (i,-1)\ .$$
הציגו בצורה מפורשת את T^*.

2) נגדיר אופרטור T על $\mathbb{C}^2$ על ידי $T(e_1) = (1+i,2),\ T(e_2) = (i,i)$. מצאו את $[T^*]_{\mathcal{E}}$ ובדקו האם T ו־T^* מתחלפים בכפל.

3) יהיה V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי ו־$T\colon V \to V$ אופרטור לינארי. הראו כי $\operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

4) יהיה V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי ו־$T\colon V \to V$ אופרטור לינארי. הראו כי T הפיך אם ורק אם T^* הפיך וכי במקרה זה מתקיים $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

5) תהא $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. הראו כי $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$.

6) יהא $V = M_{n\times n}(\mathbb{C})$ עם המכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle = \operatorname{Tr}(AB^*)$. תהא $P \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ מטריצה הפיכה ונגדיר אופרטור לינארי $T\colon V \to V$ על ידי $T(A) = P^{-1}AP$. מצאו את T^*.

7) יהיו V ו־W מרחבי מכפלה פנימית ותהא $T : V \to W$ טרנספורמציה לינארית. הראו כי $\langle v,u\rangle = \langle T(v),T(u)\rangle$ לכל $v,u \in V$ אם ורק אם $||T(v)|| = ||v||$ לכל $v \in V$.