תרגיל 10 אלגברה 2

1) במרחב $\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, מצאו בסיס אורתונורמלי לתת המרחב

$$\operatorname{Span}\{(1,1,1,1),(1,-1,2,2),(1,2,-3,-4)\}\ .$$

2) יהא $V=\mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)dx$. יישמו את שיטת גרם-שמידט לקבוצה $\{1,x,x^2\}$.

3) במרחב $\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, יהא $W=\operatorname{Span}\{(1,1)\}$ ותהא $E\colon \mathbb{R}^2\to W$ ההטלה האורתוגונלית על W.

(א) מצאו נוסחה עבור $E(x,y)$.

(ב) חשבו את המטריצה של E לפי הבסיס הסטנדרטי.

(ג) חשבו את $W^\perp=\{v\in V \mid \forall w\in W:\langle v,w\rangle=0\}$.

(ד) מצאו בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^2$ שהמטריצה של E לפיו היא $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

4) במרחב $\mathbb{C}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, יהא

$$W=\operatorname{Span}\{(1,-i,2+i,2-i),\ (-i,i,0,0),\ (2-2i,-2-i,5,3-2i)\}\ .$$

מצאו את ההיטל האורתוגונלי של הוקטור (i,i,i,i) על W.

5) יהיה V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי ותהא $P\colon V\to V$ הטלה המקיימת $||P(v)||\le||v||$ לכל $v\in V$. הוכיחו כי P הטלה אורתוגונלית.

6) במרחב $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ עם המכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=\operatorname{Tr}(AB^*)$, מצאו את המשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות האלכסוניות.

7) יהי $V=W_1\oplus W_2$ ו-f_i מכפלה פנימית על W_i. הראו שקיימת מכפלה פנימית יחידה f על V המקיימת:

(א) $W_2=W_1^\perp$

(ב) $f(v,w)=f_i(v,w)$ כאשר $v,w\in W_i$.

8) יהיו U ו-W תת-מרחבים ממימד סופי של מרחב מכפלה פנימית V. הוכיחו:

(א) אם $U\le W$ אז $W^\perp\le U^\perp$

(ב) $(U+W)^\perp=W^\perp\cap U^\perp$

(ג) $(W^\perp+U^\perp)\le(W\cap U)^\perp$

(ד) אם V ממימד סופי, אז $(W^\perp+U^\perp)=(W\cap U)^\perp$