מבחן באלגברה 2

מס' קורס: 201.1.7021
סמסטר א', תש"עד ; מועד ב'
מרצים: פרופ' מ. לוין, דר' א. סייג, פרופ' י. שגב, דר' ר. ז'וקוב
תאריך הבחינה: 1.8.2014
מיועד לתלמידי מתמטיקה/מדעי המחשב/הנדסת תוכנה/אחווה
משך הבחינה: 3 שעות ; חומר עזר: אין (גם לא מחשבונים)

יש להשיב על 4 בדיוק מתוך 5 השאלות הבאות. לכל שאלה משקל זהה (25 נקודות).
נמקו היטב את טענותיכם ושיקוליכם ונסחו במדוייק תוצאות קודמות שעליהן הנכם מסתמכים.
בהצלחה !!

---

1) יהא V מרחב וקטורי ויהא $T : V \to V$ אופרטור לינארי.

א) (5 נק') הגדירו את המושג וקטור עצמי של האופרטור הלינארי $T : V \to V$.

ב) (20 נק') הוכיחו כי וקטורים עצמיים של אופרטור לינארי המתאימים לערכים עצמיים שונים בהכרח אינם תלויים ליניארית (או לחלופין הוכיחו שהמרחבים העצמיים השייכים לערכים העצמיים שונים הינם בלתי תלויים).

---

2) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א) (8 נק') אם $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה לה ערך עצמי יחיד, וערך עצמי זה שווה לאפס אזי A מטריצה נילפוטנטית.

ב) (8 נק') יהא V מרחב מכפלה פנימית סוף מימדי ו $T : V \to V$ אופרטור לינארי. נניח כי מתקיים $T^*T + TT^* = 2T$ אזי T ניתן ללכסון.

ג) (9 נק') יהא V מרחב מכפלה פנימית מרוכב ויהא $\mathcal{B} = \{u_1, ..., u_n\}$ בסיס של V. נניח כי קיימים סקלרים $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$ כך ש

$$||\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n||^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$$

אזי $\mathcal{B}$ הוא בסיס אורתונורמלי.

$\Leftarrow\Leftarrow\Leftarrow$

---

3) יהא $V = \{p \in \mathbb{R}[x] : deg(p) \leq 2\}$ עם המכפלה הפנימית $< p, q >= \int_{-1}^{1} t^2 p(t)q(t)dt$.

א) (9 נק') מצאו בסיס אורתונורמלי עבור המרחב V.

ב) (5 נק') יהא $U = \{p \in V : p(0) = 0\}$. מצאו את הקירוב הטוב ביותר לפולינום $p(x) = 1$ במרחב U.

ג) (5 נק') נגדיר אופרטור לינארי $T : V \to V$ על ידי $T(p(x)) = xp'(x)$. הראו כי U תת מרחב T אינוריאנטי.

ד) (6 נק') האם $T_U = T|_U$ הוא צמוד לעצמו ? האם T צמוד לעצמו ?

---

4) יהא F שדה כלשהו. שאלה זו מתרחשת במרחב הוקטורי $M_{10}(F)$.

א) (15 נק') הראו כי אם $A \in M_{10}(F)$ הפיכה אזי $A^{-1} \in Span\{I, A, ..., A^9\}$.

ב) (10 נק') האם יתכן השויון $M_{10}(F) = Span\{A^i : 0 \leq i \leq 100\}$ עבור איזושהי מטריצה $A \in M_{10}(F)$?

---

5) נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & ? \\ 3 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

בה אחד האיברים אינו ידוע. בנוסף נתון $\alpha \neq 0$ מספר ממשי קבוע.
נניח כי אחד הערכים העצמיים של המטריצה A הוא α.

א) (8 נק') מצאו את שאר הערכים העצמיים של A. רמז: אין צורך בחישובים מסובכים.

ב) (12 נק') קבעו עבור אלו ערכים של α המטריצה A אינה ניתנת ללכסון.

ג) (5 נק') עבור כל ערך של α שמצאתם בסעיף הקודם שעבורו המטריצה אינה ניתנת לליכסון, קיבעו את הפולינום המינימלי שלה.
