מבחן באלגברה 2

מס' קורס: 201.1.7021
סמסטר א', תש"עד ; מועד א'
מרצים: פרופ' מ. לוין, דר' א. סייג, פרופ' י. שגב, דר' ר. ז'וקוב
תאריך הבחינה: 10.7.2014
מיועד לתלמידי מתמטיקה/מדעי המחשב/הנדסת תוכנה/אחווה
משך הבחינה: 3 שעות ; חומר עזר: אין (גם לא מחשבונים)

יש להשיב על 4 בדיוק מתוך 5 השאלות הבאות. לכל שאלה משקל זהה (25 נקודות).
נמקו היטב את טענותיכם ושיקוליכם ונסחו במדוייק תוצאות קודמות שעליהן הנכם מסתמכים.

בהצלחה !!

---

1) יהא V מרחב מכפלה פנימית ויהא $T : V \to V$ אופרטור לינארי.

א) (5 נק') הגדירו את המושג אופרטור נורמלי.

ב) (20 נק') הוכיחו: אם T אופרטור נורמלי אזי וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים שונים של T הינם ניצבים זה לזה.

---

2) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א) (8 נק') אם $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצות סימטריות נילפוטנטיות אזי $A = B$.

ב) (8 נק')

למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

פולינום אופייני ופולינום מינימלי שווים.

ג) (9 נק') אם $S : V \to V$ ו $T : V \to V$ אופרטורים לינארים מתחלפים ($ST = TS$) ואם $W \subset V$ הינו תת מרחב T אינוריאנטי, אזי W הינו S אינוריאנטי.

---

3) יהא V מרחב מכפלה פנימית ויהא $T : V \to V$ אופרטור לינארי המקיים $TT^* = T^3$. בתרגיל שלפניכם נוכיח כי T אופרטור נורמלי. נגדיר $U = Ker(T)$ ויהא $W = U^\perp$.

א) (7 נק') הוכיחו כי W הינו T^* אינוריאנטי. אין לצטט משפט בהוכחת סעיף זה.
ב) (3 נק') הוכיחו כי U הינו T^* אינוריאנטי.
ג) (3 נק') הוכיחו כי W הינו T אינוריאנטי.
ד) (7 נק') הוכיחו כי האופרטורים $T_W = T|_W$ ו $T_W^* = T^*|_W$ מתחלפים, כלומר

$$T_W T_W^* = T_W^* T_W.$$

רמז: הראו תחילה כי T_W חח"ע.
ה) (3 נק') הוכיחו כי האופרטורים $T_U = T|_U$ ו $T_U^* = T^*|_U$ מתחלפים.
ו) (2 נק') הוכיחו כי T אופרטור נורמלי.

---

4) נתונה המטריצה $A \in M_4(\mathbb{R})$ שכל איבריה שווים אחד (ביתר פרוט מתקיים $a_{i,j} = 1$ לכל $1 \leq i, j \leq 4$)

א) (5 נק') האם A ניתנת ללכסון? נמקו.
ב) (7 נק') מצאו את הערכים העצמיים ואת הפולינום האופייני של A.
ג) (5 נק') מצאו את הפולינום המינימלי של A.
ד) (8 נק') האם קיימת מטריצה אורתוגונלית P כך ש P^tAP היא אלכסונית ? אם כן מצאו P כזו.

---

5) יהא

$$V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A^t = A\}$$

מרחב המטריצות הסימטריות בגודל 2×2 עם המכפלה הפנימית $< A, B >= tr(AB^t)$.

א) (8 נק') נתון הפונקציונל $L : V \to \mathbb{R}$ המוגדר על ידי $L(A) = a + d$ עבור

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$$

מצאו מטריצה B_0 כך שלכל $A \in V$ מתקיים

$$L(A) =< A, B_0 >.$$

ב) (8 נק') הרחיבו את הפונקציונל $L \in V^*$ מהסעיף הקודם לבסיס $\mathcal{B}^*$ של V^*.

הצעה: קראו את הסעיף הבא לפני שאתם מרחיבים בצורה סתמית.
ג) (9 נק') מצאו בסיס $\mathcal{B}$ עבור V כך ש $\mathcal{B}^*$ שבניתם בסעיף ב' הוא הבסיס הדואלי של $\mathcal{B}$.
