רשימת משפטים למבחן באלגברה 2

1. לכל אידיאל $I \neq \{0\}$ ב- $F[x]$ קיים פולינום מתוקן יחיד $d \in F[x]$ כך ש- $I = d \cdot F[x]$.

2. וקטורים עצמיים של אופרטור ליניארי המתאימים לערכים עצמיים שונים בהכרח אינם תלויים ליניארית (או לחלופין הוכיחו שהמרחבים העצמיים השייכים לערכים העצמיים שונים הינם בלתי תלויים).

3. יהי V מרחב וקטורי n-ממדי מעל שדה F. ויהא $T: V \to V$ אופרטור ליניארי. אזי לפולינום האופייני ולפולינום המינימאלי של T יש בדיוק אותם שורשים (פרט לריבוי השורש).

4. אופרטור ליניארי T על מרחב וקטורי מממד סופי ניתן ללכסון אם ורק אם הפולינום המינימאלי m_T הינו מכפלת גורמים ליניאריים שונים (שני הכיוונים!)

5. אופרטור ליניארי T על מרחב וקטורי מממד סופי ניתן לשילוש אם ורק אם הפולינום האופייני f_T הינו מכפלת גורמים ליניאריים.

6. אי-שוויון קושי-שוורץ ($Cauchy - Schwartz$).

7. יהי g פונקציונל ליניארי על מרחב מכפלה פנימית מממד סופי V. אזי קיים וקטור יחיד $u \in V$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים $g(v) = f_u(v) = \langle v, u \rangle$.

8. משפט קיום ויחידות האופרטור הצמוד לאופרטור ליניארי על מרחב מכפלה פנימית מממד סופי.

9. יהי T אופרטור ליניארי נורמאלי על מרחב מכפלה פנימית V מממד סופי מעל השדה F ($F = C$ או $F = R$), ויהיו $v \in V$ ו- $\lambda \in F$. אזי $T(v) = \lambda v$ אם ורק אם $T^*(v) = \bar{\lambda} \cdot v$.

10. וקטורים עצמיים של אופרטור ליניארי נורמאלי על מרחב מכפלה פנימית V מממד סופי אשר מתאימים לערכים עצמיים שונים בהכרח ניצבים זה לזה.

11. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל C ויהי $T: V \to V$ אופרטור ליניארי. אזי T אופרטור נורמאלי אם ורק אם קיים בסיס אורתונורמלי B של V כך שהמטריצה $[T]_B$ אלכסונית.

12. יהי $T: V \to V$ אופרטור ליניארי על מרחב מכפלה פנימית V, T^* האופרטור הצמוד. יהי $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ בסיס אורתונורמלי של V ותהיינה $A = (a_{ij})$ ו- $A^* = (a_{ij}^*)$ המטריצות של T ושל T^* בהתאמה ביחס לבסיס $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.
אזי $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$.