תרגיל 12 באלגברה 2.

1. יהיה $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ כך ש-

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

יהיה $W = ker(T-2I)$. הוכיחו כי ל-W אין משלים T-אינווריאנטי.

2. מצאו את צורת ג'ורדן של המטריצות הבאות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

3. מצאו את צורת ג'ורדן של המטריצות הבאות (מעל השדה המרוכב):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. תהיה $A \in M_5(\mathbb{C})$ כך ש

$$f_A(x) = (x-2)^3(x+7)^2, \;\; m_A(x) = (x-2)^2(x+7)$$

מצאו את צורת ג'ורדן של A.

5. תהיה $A \in M_6(\mathbb{C})$ כך ש $f_A(x) = (x+2)^4(x-1)^2$. מצאו את כל צורות ג'ורדן האפשריות של של A.

6. תהיה $A \in M_{11}(\mathbb{C})$ כך ש

$$f_A(x) = x^2(x-1)^5(x+4)^4, \;\; m_A(x) = x(x-1)^2(x+4)^3$$

מצאו את כל צורות ג'ורדן האפשריות של של A.

7. יהיו $A,B \in M_2(\mathbb{C})$ כך ש $B = A^4$. הוכיחו כי אם B הפיכה ונתנת ללכסון אז גם A נתנת ללכסון.

רמז: הניחו תחילה כי A בצורת ג'ורדן.

8. יהיו $A,B \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש $f_A(x) = f_B(x)$ ו $m_A(x) = m_B(x)$.

(א) הוכיחו כי אם $n \leq 3$ אז A דומה ל-B.

הדרכה: שלב א' בדקו תחילה את צורת ג'ורדן של אופרטורים נילפוט-נטיים.

שלב ב' הראו כי אם

$$f_A(x) = \prod_{k=1}^{s}(x-\lambda_k)^{d_k}, \ \ d_k \leq 3$$

אז צורת ג'ורדן של A נקבעת ע"י $f_A(x)$ ו $m_A(x)$.

(ב) מצאו מטריצות $A,B \in M_4(\mathbb{F})$ כך ש $f_A(x) = f_B(x)$ ו $m_A(x) = m_B(x)$, אך A ו B אינן דומות.