טופולוגיה וגיאומטריה

תרגיל מס' 1 — חלק ראשון

1. (א) הראו כי שקילות הומוטופית בין מ"ט היא יחס שקילות.

(ב) הראו כי $\mathbb{R}^n$ שקול הומוטופית לנקודה.

(ג) הראו כי $\mathbb{R}^n - \{0\}$ שקול הומוטופית ל S^{n-1}. האם הם הומאומורפים?

(ד) כתבו הומאומורפיזם מפורש בין $S^n - \{N\}$ ל- $\mathbb{R}^n$ כאשר N הקוטב הצפוני ב ~~$S^n = \{\vec{x} \mid \|x\|_2 = 1\}$~~

$$S^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$$

2. (א) תהי $X \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה קומפקטית. הראו כי X כוויצה ובפרט X פשוט קשר (כלומר קשיר מסילתית וכל מסילה הומוטופית למסילה קבועה).

(ב)* תהי $X \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה קומפקטית כך ש $X^\circ \neq \emptyset$. הראו כי X הומאומורפית ל D^n הכדור הסגור.

$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\}$.

3. נגדיר $T_2 = S^1 \times S^1$ כאשר $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$.

~~תארו שיכון~~

(א) הראו כי T_2 יריעה דו מימדית.

(ב) הציגו שיכון של T_2 ב $\mathbb{R}^4$.

(ג) נגדיר $D \subseteq \mathbb{R}^3$ להיות משטח הסיבוב הנוצר מסיבוב $(y-2)^2 + z^2 = 1$ סביב ציר z. כתבו משוואה המתארת את D והראו כי D הומאומורפי ל T_2.

(ד)** האם ניתן לשכן את T_2 ב $\mathbb{R}^2$?